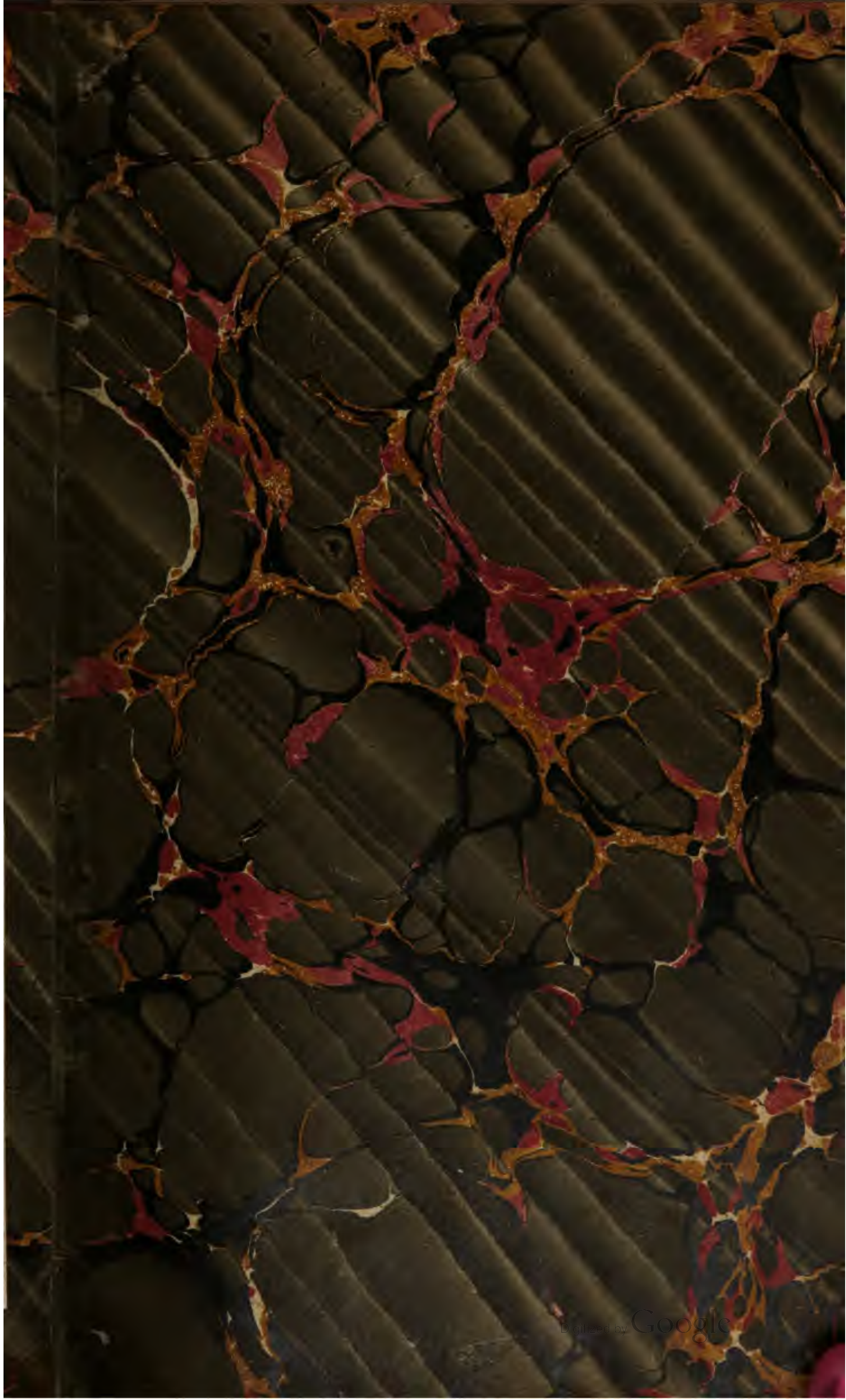



SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ
Haven Fund.
Rec. Feb. 2, 1854.





COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Cet ouvrage se trouve aussi :

A ANGOULÊME..	chez Perez-Lecler.
BORDEAUX...	— Chaumas.
BOURGES....	— Vermeil.
BREST.....	— Me Vve Lefournier.
CHERBOURG..	— Lefrançois.
LILLE......	— Vanackère.
LORIENT....	— Leroux-Cassart.
LYON......	— Perisse frères.
	— Giberton et Brun.
MARSEILLE...	— Camoin.
METZ.....	— Warion.
MONTPELLIER.	— Séwalle.
NANCY.....	— G. Grimblot et Cie.
NANTES.....	— Forest aîné.
	— Guéraud.
	— Suireau.
ORLÉANS....	— Gatineau.
RENNES.....	— Verdier.
ROCHEFORT..	— Pénart.
ROUEN.....	— Lebrument.
STRASBOURG..	— Treuttel et Wurtz.
	— Mme Levrault.
	— Derivaux.
TOULON....	— Monge et Willamus.
TOULOUSE...	— Gallon.
	— Bon et Privat.
	— Gimet.

LONDRES....	— Dulau et Cie, Soho-Square.
MADRID....	— A. Poupart et frère.
TURIN.....	— Bocca.
VIENNE....	— Rohrmann.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

Jean Marie Constant
Par M. DUHAMEL,
Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

DEUXIÈME PARTIE.
SECONDE ÉDITION.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.
QUAI DES AUGUSTINS, 55.
LEIPSIG, L. MICHELSEN, LIBRAIRE.

1847.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du Libraire-Éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.

Bachelier

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

FIN DE LA TABLE DE LA DEUXIÈME PARTIE.

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
SECONDE PARTIE.

Des intégrales des équations différentielles d'ordre quelconque.

1. Intégrer une équation différentielle entre deux variables x et y, c'est trouver toutes les valeurs de y en fonction de x qui y satisfont; ou, en d'autres termes, c'est trouver une équation entre x et y qui soit une conséquence de la proposée, et réciproquement, dont celle-ci soit une conséquence.

Sous le point de vue géométrique, c'est trouver toutes les courbes dont les coordonnées et leurs rapports différentiels des divers ordres satisfont à cette équation.

Considérons l'équation générale de l'ordre m, c'est-à-dire celle où m est l'indice de la dérivée de l'ordre le plus élevé qui y entre, quelles que soient d'ailleurs les puissances dont ces dérivées soient affectées. Soit cette équation

$$(1)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0.$$

Elle détermine $\frac{d^m y}{dx^m}$ en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, et si on la différentie successivement, les rapports différentiels $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$, $\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}$, etc., seront déterminés en fonction des mêmes quantités.

Toute fonction de x peut, en général, être développée en série, au moyen des théorèmes de Taylor, de Maclaurin, ou de Bernoulli. Le premier est moins sujet aux exceptions parce qu'on peut choisir la valeur de x qui entre dans les coefficients, de telle sorte qu'aucun d'eux ne devienne infini. Dans ce cas, la série sera nécessairement convergente, pour toutes les valeurs de x comprises entre certaines limites déterminées, et quelquefois même pour toute valeur de x.

Soit donc y la valeur la plus générale qui satisfasse à l'équation (1). Si on la suppose développable d'après la formule de Maclaurin, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ + \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0 \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \ldots; \end{aligned}\right.$$

et si l'on remplace tous les coefficients à partir de celui de x^m, par leurs valeurs en fonction des précédents, déterminées comme nous l'avons dit, la fonction cherchée sera nécessairement comprise dans celles que représente ce développement, puisque l'on n'aura exprimé que des conditions auxquelles elle doit satisfaire. Et réciproquement, la fonction ainsi déterminée satisfait nécessairement à l'équation différentielle; car, si l'on différentie m fois les deux membres de l'équation (1), on obtient précisément le développement de l'équation (1) résolue par rapport à $\frac{d^m y}{dx^m}$.

L'équation (2) donnerait donc la solution complète de la question, si toutes les valeurs de y étaient développables de cette manière. Mais, dans tous les cas, il ne peut manquer que celles pour lesquelles certains coefficients différentiels cesseraient d'être finis et déterminés, pour la valeur particulière $x = 0$.

2. Si l'on avait développé, d'après le théorème de Taylor, suivant les puissances de $x - x_0$, on aurait eu comme conséquence de l'équation (1)

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} y = y_0 &+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots \\ &+ \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0 \frac{(x - x_0)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

les coefficients étant toujours déterminés à partir de l'ordre m, au moyen de l'équation (1) et se rapportant à $x = x_0$; et réciproquement, l'équation (1) se déduirait de celle-ci par m différentiations successives.

La valeur arbitraire x_0 pourrait bien être choisie de manière à ce qu'aucun coefficient de la série ne devînt infini, si ces coefficients ne dépendaient que de x_0; mais comme ils renferment encore la valeur correspondante de y et de ses dérivées, il pourra arriver qu'une certaine fonction $y = \varphi(x)$, tout en satisfaisant à l'équation différentielle, rende infinis ou indéterminés certains coefficients du développement, quel que soit x_0; nous en donnerons bientôt un exemple.

On voit par là que les formules (2) et (3) peuvent ne pas renfermer toutes les fonctions qui satisfont à l'équation (1). Il est inutile de dire que ces deux formules coïncident lorsque toutes les solutions sont développables au moyen de l'une et de l'autre, puisqu'elles représentent alors identiquement les mêmes fonctions. Dans les limites où elles sont suffisamment convergentes, elles peuvent

servir à donner, par approximation, la valeur de la fonction cherchée. On donne le nom d'*intégrale générale* de l'équation (1) à l'équation (3), dont l'équation (2) n'est qu'un cas particulier correspondant à $x_0 = 0$.

L'équation (3) satisfaisant à l'équation proposée, quelles que soient les valeurs des m premiers coefficients y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$, puisqu'ils disparaissent au moyen des m différentiations qui conduisent de l'équation (3) à la proposée, nous en conclurons que *l'intégrale générale d'une équation différentielle de l'ordre m renferme nécessairement m constantes arbitraires* qui sont les valeurs de la fonction et de ses $m - 1$ premières dérivées correspondantes à une valeur de x prise à volonté.

3. Il est facile de démontrer réciproquement que toute équation entre x et y qui satisfera à l'équation différentielle, et renfermera m constantes arbitraires, est identique avec l'intégrale générale représentée par le développement (3). En effet, si l'on conçoit qu'on développe, suivant les puissances de x, la valeur de y donnée par cette équation, les m premiers coefficients renfermeront x_0 et les m constantes arbitraires et pourront prendre toutes les valeurs possibles, en choisissant convenablement ces constantes, quelle que soit d'ailleurs la valeur qu'on prenne pour x_0, ils peuvent donc être regardés comme entièrement arbitraires; et comme les suivants en dépendent d'après l'équation (1), le développement ne différera pas de celui que donne l'équation (3). D'où résulte cette importante proposition, que *toute équation entre x et y qui satisfait à une équation différentielle de l'ordre m, en est l'intégrale générale lorsqu'elle renferme m constantes arbitraires,* au moyen desquelles il soit possible de donner des valeurs arbitraires à la fonc-

tion et à ses $m-1$ premières dérivées, pour une certaine valeur de x.

4. La dernière condition exprimée dans cette proposition est indispensable parce qu'une équation peut renfermer m constantes, susceptibles d'être réduites à un moindre nombre par des transformations. Ainsi, lorsqu'on voudra s'assurer si cette équation constitue l'intégrale générale, il faudra la différentier $m-1$ fois, et chercher si l'on peut donner aux m constantes des valeurs telles, que pour une valeur donnée de x on en puisse tirer des valeurs arbitraires de y et de ses $m-1$ premières dérivées. Et pour cela il suffira de reconnaître si les m équations peuvent être résolues par rapport aux m constantes, sans qu'il en résulte aucune absurdité: car alors pour une valeur quelconque de x, on pourra choisir arbitrairement y et ses $m-1$ premières dérivées.

Si par exemple on avait trouvé qu'une équation du second ordre fût satisfaite par la valeur

$$y = Ce^{ax} + C'e^{a'x},$$

C, C′ étant des constantes arbitraires, on en tirerait

$$\frac{dy}{dx} = aCe^{ax} + a'C'e^{a'x};$$

or, quelque valeur finie que l'on donne à x, ces deux équations donnent des valeurs finies pour C et C′, si l'on n'a pas $a=a'$. D'où il suit que, si a' est différent de a, la valeur trouvée de y est l'intégrale générale.

Si l'on avait obtenu une solution de cette forme

$$y = C\sin ax + C'\cos ax,$$

on en déduirait

$$\frac{dy}{dx} = aC\cos ax - aC'\sin ax;$$

d'où l'on tirerait toujours des valeurs finies pour C et C', pourvu que a ne fût pas nul; la valeur de y serait donc encore l'intégrale générale.

Il en sera de même pour une expression de la forme

$$y = C\sin(x + a) + C'\sin(x + a');$$

si on la différentie, et qu'on prenne, pour plus de simplicité, $x_0 = 0$, on trouve

$$y_0 = C\sin a + C'\sin a',$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = C\cos a + C'\cos a',$$

et l'on tirera de là des valeurs finies pour C et C', si l'on n'a pas

$$\sin a\cos a' - \sin a'\cos a = 0,$$

ou

$$a' = a \pm n\pi,$$

n étant un nombre entier. La valeur de y sera donc l'intégrale générale, excepté dans ce cas particulier.

Mais si l'on trouvait pour solution d'une équation du troisième ordre

$$y = C\sin(x + a) + C'\sin(x + a') + C''\sin(x + a''),$$

en différentiant deux fois, puis faisant $x = 0$, on aurait

$$y_0 = C\sin a + C'\sin a' + C''\sin a'',$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = C\cos a + C'\cos a' + C''\cos a'',$$
$$-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = C\sin a + C'\sin a' + C''\sin a''.$$

Or, la première et la troisième de ces dernières équations étant incompatibles, si l'on laisse y_0 et $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$ indépendants l'un de l'autre, on voit qu'il est impossible de dé-

terminer les trois constantes de manière que y et ses deux premières dérivées aient des valeurs quelconques pour $x = 0$: donc la valeur de y n'est pas l'intégrale générale, et il est facile de voir dans cet exemple que les constantes pouvaient être réduites à deux; car, en développant les sinus, on trouve

$$y = (C\cos a + C'\cos a' + C''\cos a'')\sin x + (C\sin a + C'\sin a' + C''\sin a'')\cos x,$$

et la valeur de y ne renferme réellement que deux constantes arbitraires, qui sont les coefficients de $\sin x$ et $\cos x$.

5. Lorsque dans l'intégrale générale d'une équation on donne des valeurs particulières à une ou plusieurs des constantes arbitraires qu'elle renferme, cette solution se nomme une *intégrale particulière*.

Lorsqu'on satisfait à une équation différentielle au moyen d'une équation qui n'est pas renfermée dans l'intégrale générale, on a ce que l'on appelle une *solution singulière*, ou une *intégrale singulière*.

Il faut alors, comme nous l'avons déjà remarqué, que des coefficients du développement (3) deviennent infinis, ou indéterminés quel que soit x_0, et par conséquent lorsqu'on le remplace par la variable x. Et comme ces coefficients ne renferment que des dérivées d'ordre inférieur à m, il en résulte que la valeur $y = \varphi(x)$, qui constitue une solution singulière d'une équation différentielle de l'ordre m, doit satisfaire en même temps à cette équation et à une autre équation différentielle, d'un ordre inférieur, dans laquelle il n'entre aucune constante arbitraire.

Si par exemple l'équation proposée est du premier ordre, les solutions singulières ne pourront être données que par des équations entre x et y sans constante arbitraire; et, par conséquent, une solution renfermant une

constante arbitraire ne pourra être que l'intégrale générale.

Mais si l'équation proposée était d'un ordre supérieur au premier, la solution singulière serait, en général, une équation différentielle, d'un ordre inférieur d'une unité, qui donnerait une intégrale renfermant des constantes arbitraires. On voit donc que les solutions singulières des équations différentielles de l'ordre m peuvent être données par des équations entre x, y et $m - 1$ constantes au plus. On ne peut donc toujours conclure de la présence de constantes arbitraires, qu'une solution est une intégrale particulière et non une solution singulière.

6. Nous allons maintenant donner un exemple du cas annoncé dans le n° 2. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + (y - x)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.$$

On en tire par des différentiations successives

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(y - x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}(y - x)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{9}(y - x)^{-1},$$

et l'on trouvera, en employant la formule (2),

$$y = y_0 + \left(1 - y_0^{\frac{1}{3}}\right)x + \frac{x^2}{2.3}y_0^{-\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{2.3.9}y_0^{-1} + \ldots.$$

On reconnaît facilement qu'en posant

$$\frac{2}{3}y_0^{\frac{2}{3}} = c,$$

cette équation se réduit à

$$(a) \qquad y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(c - x)^{\frac{3}{2}},$$

et cette valeur se trouverait directement, en posant dans l'équation proposée $y - x = z$, ce qui la réduit à

$$\frac{dz}{dx} + z^{\frac{1}{3}} = 0,$$

d'où

$$z^{-\frac{1}{3}} dz = - dx;$$

intégrant les deux membres, et ajoutant une constante arbitraire c à l'un d'eux, on aura

$$\tfrac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} = c - x,$$

d'où

$$z = (\tfrac{2}{3})^{\frac{3}{2}} (c - x)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad y = x + (\tfrac{2}{3})^{\frac{3}{2}} (c - x)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette équation donne identiquement les mêmes solutions que la proposée, pourvu qu'il ait été permis de diviser par $z^{\frac{1}{3}}$ ce qui exige que z ou $y - x$ ne soit pas zéro. Si donc $y - x = 0$ ne peut satisfaire à la proposée, l'équation (a) en donnera toutes les solutions; mais si $y - x = 0$ y satisfaisait, il y aurait des solutions qui pourraient ne pas être renfermées dans l'équation (a); et, en effet, $y - x = 0$ ne satisfait pas à cette dernière, quelque valeur que l'on donne à la constante arbitraire, et satisfait cependant à la proposée. Elle est donc ce que nous avons nommé *solution singulière*.

Cette solution n'étant pas renfermée dans l'intégrale générale, voyons ce que deviennent les coefficients du développement le plus général de y, donné par la formule (3).

Or il est évident que, si l'on fait $y = x$, tous les coefficients différentiels, à partir de $\frac{d^2y}{dx^2}$, deviennent infinis; et si l'on n'avait pas supprimé le facteur commun $(y - x)^{\frac{1}{3}}$

aux deux termes de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, elle se serait présentée sous la forme $\frac{0}{0}$.

Cet exemple montre qu'il peut arriver, comme nous l'avions annoncé précédemment, qu'une valeur de y en x satisfaisant à une équation différentielle, et développable suivant les puissances de x, ne donne cependant pas un développement possible en partant de l'équation différentielle proposée, et que, par conséquent, on ne peut répondre que l'intégrale, dite *générale*, renferme toutes les solutions de l'équation proposée; ou, en d'autres termes, qu'il n'existe pas de *solutions singulières*.

7. S'il arrive que l'une des équations obtenues par la différentiation de la proposée soit décomposable en deux facteurs dont l'un soit d'un ordre inférieur à l'autre, et qu'on égale à zéro celui de l'ordre le moins élevé, on obtient une équation de plus entre les dérivées déjà considérées; il y aura, par conséquent, une arbitraire de moins dans ce développement de y, qui, en général, ne sera pas compris dans l'autre développement qui renferme m constantes arbitraires.

Considérons comme exemple l'équation

$$(b) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

On trouve, en la différentiant,

$$\left(2\frac{dy}{dx} + x\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

En considérant le facteur du second ordre, on aura, par des différentiations successives,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0\ldots;$$

l'équation (b) donnera en conséquence, par le développe-

ment de Maclaurin,

$$y = y_0 + x\sqrt{y_0}.$$

En considérant maintenant le facteur du premier ordre, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \ldots.$$

Observons maintenant que y_0 n'est plus arbitraire parce qu'on a deux équations entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, et qu'on en tire pour

$$x = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

On a donc, pour y, la valeur suivante sans constante arbitraire,

$$y = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2},$$

laquelle n'est pas comprise dans l'intégrale qui renferme une constante arbitraire, et, par conséquent, est une solution singulière.

Des équations différentielles d'une équation à deux variables.

8. Si l'on considère une équation à deux variables $F(x, y) = 0$ et qu'on en déduise d'une manière quelconque une autre équation qui renferme x, y et des dérivées de y par rapport à x, cette dernière est ce qu'on appelle une équation différentielle de la première. Elle est une conséquence de cette équation, mais celle-ci n'en est pas toujours une conséquence nécessaire. Ainsi, nous avons vu qu'une fonction de x n'a qu'une dérivée; tandis qu'une dérivée peut correspondre à une infinité d'intégrales, qui diffèrent par la valeur d'une constante.

Si entre l'équation primitive et celle que l'on obtient

en différentiant une fois ses deux membres, on élimine une constante a, on aura une certaine équation différentielle du premier ordre de la proposée. Et généralement, si l'on différentie m fois la proposée, on pourra éliminer m quelconques des constantes qui y entrent, et l'on obtiendra ainsi une équation différentielle de l'ordre m de l'équation primitive, qui renfermera m constantes de moins qu'elle. On aurait une équation différente, du même ordre, si l'on éliminait entre les mêmes équations m autres constantes.

On doit même observer que toute équation différentielle peut être considérée comme obtenue de cette manière; car nous avons démontré que, si elle est de l'ordre m, son intégrale générale renferme m constantes arbitraires qui ne sont pas dans l'équation différentielle. Donc celle-ci n'a pu être déduite de l'autre qu'en éliminant ces constantes entre elle et celles que l'on en aura tirées au moyen de m différentiations successives.

Mais ces différentiations peuvent être faites de bien des manières différentes :

Si par exemple on ne veut éliminer qu'une constante, on pourra différentier l'équation après l'avoir mise préalablement sous telle forme que l'on voudra; on aura ainsi diverses équations du premier ordre, et l'on éliminera la constante entre l'une quelconque d'entre elles et l'équation proposée.

Si l'on veut éliminer deux constantes, on pourra différentier deux fois de suite l'équation mise sous une forme arbitraire; on aura ainsi trois équations renfermant les deux quantités à éliminer. Ou bien encore on éliminera d'abord l'une d'elles entre l'équation proposée et celle du premier ordre qu'on en déduira; puis, traitant de même l'équation ainsi obtenue, on en éliminera la seconde constante.

Les combinaisons seraient plus multipliées encore s'il s'agissait d'éliminer un plus grand nombre de constantes. Or nous allons démontrer que, de quelque manière que cette élimination ait été faite, on obtient toujours la même équation entre x, y, $\frac{dy}{dx}$, etc., et les constantes non éliminées.

Supposons en effet, s'il est possible, que l'on parvienne ainsi à deux équations différentes, en éliminant les mêmes constantes en nombre m, et soient ces deux équations, résolues par rapport à $\frac{d^m y}{dx^m}$,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right),$$
$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right).$$

D'après ce qui a été démontré, si l'on déduit de l'une ou de l'autre une équation entre x, y et m constantes arbitraires, on obtiendra l'équation même d'où elles ont été tirées, et, par conséquent, on aura des résultats identiques. Si donc on les ordonne par rapport aux puissances de $x - x_0$, les coefficients des différentes puissances seront respectivement égaux, en supposant toutefois que les constantes y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0$, correspondantes à la même valeur x_0, soient les mêmes de part et d'autre.

Or les développements auront respectivement pour coefficients de $\frac{(x - x_0)^m}{1.2\ldots m}$, les deux expressions

$$\mathrm{F}\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0\right],$$
$$f\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0\right].$$

Il faut donc que, quel que soit x_0, ces deux fonctions soient égales, pour toutes les valeurs données arbitrairement, aux quantités y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dy^{m-1}}\right)_0$, et aux constantes non éliminées, qui sont les mêmes de part et d'autre; par conséquent, toutes ces diverses quantités doivent y entrer d'une manière identique. Mais elles y entrent de la même manière que $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, et les constantes non éliminées entrent dans les deux expressions de $\frac{d^m y}{dx^m}$; donc ces deux expressions sont identiques, et les deux équations différentielles, résolues par rapport à $\frac{d^m y}{dx^m}$, le sont par conséquent; d'où se déduit cette importante proposition:

De quelque manière que l'on parvienne à une équation différentielle de l'ordre m, en partant d'une même équation entre x et y, et éliminant les mêmes constantes en nombre m, on ne peut obtenir qu'une seule et même équation.

9. Cette proposition donne lieu à quelques remarques utiles.

En effet, parmi toutes les manières d'opérer ce calcul, choisissons en particulier la suivante :

Éliminons d'abord l'une des constantes entre l'équation proposée et sa première dérivée. Éliminons de même une seconde constante entre l'équation obtenue et sa dérivée; puis une troisième constante entre la nouvelle équation ainsi obtenue et sa dérivée, et ainsi de suite jusqu'à ce que les m constantes désignées aient disparu. Nous aurons ainsi l'équation cherchée du $m^{ième}$ ordre; et, par les raisons déjà données, cette équation, et même toutes les intermédiaires, seront identiques à celles que l'on obtiendrait par d'autres procédés, en éliminant les

mêmes constantes. Mais l'ordre dans lequel on élimine les m constantes détermine les équations intermédiaires; et autant on peut faire de combinaisons n à n avec m lettres, autant on pourra obtenir d'équations différentes de l'ordre n, dont chacune ne pourra d'ailleurs avoir qu'une seule forme. On tire de là cette conséquence importante :

Toute équation différentielle de l'ordre m peut être déduite de m équations différentes de l'ordre $m-1$, *qui renferment chacune une constante arbitraire; de* $\frac{m(m-1)}{1.2}$ *équations de l'ordre* $m-2$, *qui en renferment deux; et généralement de* $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}$ *de l'ordre* $m-n$, *renfermant n constantes arbitraires.*

10. D'après cela, si l'on a à intégrer une équation de l'ordre m, on pourra chercher ses m intégrales premières. Si l'on parvient à les déterminer, on aura m équations entre $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, renfermant chacune une constante arbitraire; et, par conséquent, en éliminant les $m-1$ dérivées de x, on obtiendra une équation entre x, y et m constantes arbitraires : on aura donc l'intégrale générale de l'équation proposée.

11. Il est quelquefois plus facile de trouver les intégrales premières de l'équation de l'ordre $m+1$ que l'on obtient en différentiant la proposée. Mais alors l'intégrale générale de cette dernière sera celle de la première, à l'un des membres de laquelle on aurait ajouté une constante arbitraire; et si l'on connaissait l'intégrale de l'équation de l'ordre $m+1$, on aurait celle de la proposée en y faisant cette constante nulle. En conséquence on cherchera les $m+1$ intégrales premières; on en éliminera les m dérivées de y, puis on supposera nulle la con-

stante en question. Mais l'une des intégrales premières n'est autre chose que la proposée augmentée de cette constante et se réduit, par conséquent, à la proposée, en supposant cette constante nulle; donc, si l'on peut obtenir m intégrales premières de l'équation de l'ordre $m+1$, qui ne renferment pas la proposée, il suffira d'éliminer, entre celle-ci et les m intégrales, les m dérivées de y, et l'on aura l'intégrale générale demandée.

Si l'on peut trouver l'intégrale générale de l'équation de l'ordre $m+1$, par un moyen quelconque, elle renfermera $m+1$ constantes arbitraires; mais ces constantes seront liées entre elles par une équation que l'on obtiendra en substituant la valeur trouvée de y dans l'équation proposée; de sorte que l'on aura seulement m constantes arbitraires, comme cela doit être.

Autre moyen de déterminer les intégrales des équations différentielles.

12. Au lieu de faire servir l'équation différentielle à la détermination des coefficients du développement de l'intégrale, on peut l'employer à calculer, avec autant d'approximation que l'on voudra, les accroissements successifs de la valeur de y, et, par suite, cette valeur elle-même. On n'aura pas ainsi l'expression de y au moyen de x, mais autant de valeurs particulières que l'on voudra; en d'autres termes, on connaîtra approximativement autant de points qu'on voudra de la courbe représentée par l'équation que l'on cherche.

Considérons d'abord l'équation du premier ordre, que l'on peut toujours supposer mise sous la forme

$$dy = \mathrm{F}(x, y)\,dx.$$

Si l'on se donne à volonté la valeur y_0 correspondante à un x arbitraire x_0, l'équation donnera l'accroissement

que prend y quand x devient $x_0 + \alpha$; sa valeur sera $dy_0 = F(x_0, y_0)\alpha$, en négligeant toutefois les quantités du second ordre par rapport à α. Désignant par x', y' ces deux nouvelles valeurs de x et y, l'accroissement de y' relatif à un accroissement α de x' aura pour valeur

$$dy' = F(x', y')\alpha,$$

en négligeant encore les quantités du second ordre par rapport à α, ainsi que l'erreur encore plus petite provenant de la valeur de y dans laquelle on a négligé une quantité du second ordre. En continuant ainsi, et négligeant toujours les quantités du second ordre par rapport à α, on aura autant de valeurs que l'on voudra de y, ou autant de points qu'on voudra de la courbe qui satisfait à l'équation différentielle, et passe par le point arbitraire dont les coordonnées sont x_0, y_0. On voit par là qu'une équation du premier ordre a une infinité d'intégrales qui ne diffèrent les unes des autres que par la valeur d'une constante, qui est l'y correspondant à une valeur de x choisie arbitrairement. L'expression générale de y, résultant des calculs précédents, est

$$y = y_0 + F(x_0, y_0)\alpha + F\{x_0 + \alpha, y_0 + F(x_0, y_0)\alpha\}\alpha + \ldots,$$

le nombre des termes à prendre dépendant de la valeur de x que l'on considère; et l'on aurait sans erreur la valeur de y en fonction de x, si l'on pouvait trouver la limite vers laquelle tend la somme de $n + 1$ termes de cette suite, en supposant $n\alpha = x - x_0$, et α décroissant indéfiniment.

13. Il est à remarquer que cette manière de déterminer les diverses intégrales de l'équation différentielle s'applique à toutes les solutions; les intégrales particulières et les intégrales singulières s'y trouvent également comprises; ce qui n'a pas lieu dans les autres méthodes.

On procéderait d'une manière semblable si l'on avait

à intégrer une équation du second ordre, dont la forme peut toujours être supposée réduite à celle-ci

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad \text{ou} \quad d\frac{dy}{dx}=\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx.$$

On se donnerait arbitrairement les valeurs y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ correspondantes à x_0, et l'équation ferait connaître l'accroissement de $\frac{dy}{dx}$ relatif à l'accroissement α de x; on aurait ainsi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondante à $x_0+\alpha$; d'ailleurs l'accroissement de y serait connu, puisqu'on donne $\frac{dy_0}{dx}$. On connaîtrait donc, pour la valeur $x_0+\alpha$, les valeurs correspondantes de y et $\frac{dy}{dx}$, et l'on répéterait indéfiniment cette opération. On voit par là qu'il y a deux constantes arbitraires dans l'intégrale d'une équation du second ordre. Le procédé que nous venons de suivre ne fait connaître que par approximation les valeurs des intégrales; on ne les connaîtrait exactement qu'en déterminant la limite de la série quand α tend vers zéro, et qu'on pose, comme dans le cas précédent, $n\alpha=x-x_0$.

Les mêmes considérations s'appliquent évidemment aux équations de tous les ordres.

Intégrales singulières des équations du premier ordre, déduites de l'intégrale générale.

14. Soit (1)... $\mathrm{F}(x, y, a)=0$ l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, a étant la constante arbitraire, qui, éliminée entre l'équation (1) et sa dérivée

$$(2) \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

conduit à l'équation différentielle proposée. Il s'agit de savoir si cette dernière peut admettre des solutions qui ne soient pas renfermées dans l'intégrale générale.

Or toute équation entre x et y peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad F(x, y, \varphi) = 0,$$

φ étant une certaine fonction de x et y, et F désignant la même fonction que dans l'équation (1) où l'on a remplacé la constante a par la fonction φ. En effet, si l'on égale $F(x, y, \varphi)$ à une fonction quelconque, on tirera pour φ une valeur qui rendra cette équation identique. On peut donc supposer que l'équation (3) représente une solution quelconque de l'équation proposée, et il reste à voir ce que doit être pour cela la fonction φ.

En différentiant l'équation (3), on trouve, en désignant par $\frac{d\varphi}{dx}$ la dérivée totale de φ,

$$(4) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

équation dans laquelle on peut remettre la valeur φ tirée de (3), ce qui produit le même effet, dans les deux premiers termes de (4), que si l'on tirait a de (1) pour le reporter dans (2). Donc, pour l'identité des valeurs de $\frac{dy}{dx}$, il est nécessaire et suffisant que la substitution de φ rende

$$(5) \qquad \frac{\frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = 0,$$

y étant regardé comme la fonction de x cherchée; ce qui peut avoir lieu de plusieurs manières.

1°. Si $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, φ n'est autre chose qu'une constante, et l'équation (3) coïncide avec l'intégrale générale.

2°. Si l'on égale à zéro $\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}}$, après la substitution de la valeur de φ tirée de (3), ce qui détermine la valeur cherchée de y, on a le même résultat que si l'on déterminait φ par l'équation $\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}} = 0$, et qu'on reportât sa valeur dans (3).

D'où l'on conclut que, quand on a l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, on aura toutes les autres intégrales en éliminant la constante entre l'équation intégrale et sa dérivée partielle par rapport à la constante, égalée à zéro; ou sa dérivée partielle par rapport à y, égalée à l'infini. Néanmoins il faudra s'assurer si chacune de ces hypothèses annule réellement le premier membre de l'équation (5) et ne le réduit pas à $\frac{0}{0}$.

Il sera encore nécessaire de s'assurer si les solutions ainsi obtenues ne sont pas renfermées dans l'intégrale générale. Dans ce cas particulier, on aura une intégrale particulière au lieu d'une intégrale singulière.

15. Sous quelque forme qu'on mette l'équation (1), l'application des règles précédentes doit nécessairement conduire aux mêmes solutions, et c'est ce que l'on peut vérifier en observant que le rapport des deux dérivées partielles $\frac{dF}{d\varphi}$, $\frac{dF}{dy}$ sera toujours le même, après avoir substitué la valeur de y tirée de $F = 0$, quoique chacune de ces deux dérivées change quand on transforme l'équa-

tion $F = o$. En effet, si l'on a une équation quelconque $F(x, y, z, u) = o$, le rapport des deux dérivées partielles du premier membre par rapport à deux des variables, u et z par exemple, exprime toujours, au signe près, la dérivée de l'une des variables u et z par rapport à l'autre; et par conséquent, après l'élimination de l'une des deux, il ne dépend pas de la forme sous laquelle on présente l'équation qui les lie.

Ainsi, lorsqu'une transformation de l'équation (1) fera perdre des solutions à l'équation $\frac{dF}{d\varphi} = o$, elle les fera acquérir à l'équation $\frac{1}{\frac{dF}{dy}} = o$.

16. L'intégrale singulière a une liaison géométrique très-remarquable avec l'intégrale générale. En effet, en éliminant a entre l'équation (1) et sa dérivée partielle par rapport à a, on a l'équation du lieu des intersections successives des courbes représentées par l'équation (1), dans laquelle on fait varier a d'une manière continue. Donc l'intégrale singulière représente la courbe enveloppe des intégrales particulières.

15. Si l'on construit, d'après l'équation différentielle, le lieu géométrique d'une quelconque de ses intégrales, comme nous l'avons indiqué précédemment, et que l'on choisisse pour l'ordonnée y_0 celle de la courbe enveloppe, correspondante à l'abscisse x_0, l'équation devra fournir deux valeurs générales de $\frac{dy}{dx}$, correspondantes l'une à l'enveloppe, l'autre à l'enveloppée, et qui seront égales, pour le point commun à ces deux courbes. La construction indiquée fournira alors les deux courbes. Il y a toutefois une exception remarquable à cette proposition : elle a lieu lorsque l'enveloppe qui représente l'intégrale singulière est une ligne droite.

En effet, si l'on part d'un point de cette droite, deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales en ce point, et, par conséquent, les deux valeurs correspondantes de dy que l'équation fera connaître seront les mêmes, comme cela a lieu en général; mais, dans le cas actuel, une de ces valeurs sera rigoureusement exacte, et ce sera celle qui correspond à la ligne droite dont l'équation du premier degré donne, sans rien négliger, $dy = pdx$, tandis que dans tout autre cas on néglige une quantité infiniment petite par rapport à dy. Il suit de là que le point voisin du point de départ appartient rigoureusement à l'enveloppe, et qu'on se trouve, par conséquent, dans le même cas que le premier. On voit donc que, dans ce cas, l'équation différentielle donnera l'intégrale singulière seulement, et aucune des intégrales particulières; et il est clair que c'est le seul cas où cela arrive: car, si le second point n'était pas rigoureusement sur l'enveloppe, l'équation ne donnerait pas deux valeurs rigoureusement égales pour $\frac{dy}{dx}$, quand on y substituerait les coordonnées de ce point; donc, à la valeur suivante de x, on trouverait deux points au lieu d'un, et les deux lignes existeraient nécessairement.

L'intégrale singulière peut aussi être déterminée au moyen de l'équation différentielle elle-même. Soit cette équation

$$f(x, y, y') = 0, \tag{6}$$

dans laquelle y' représente $\frac{dy}{dx}$.

La représentation géométrique de la solution singulière étant la courbe enveloppe de celles qui représentent les intégrales particulières, celles-ci se coupent généralement les unes les autres; et, quand elles sont infiniment voisines, le point d'intersection devient un point de con-

tact et appartient à l'enveloppe. Ainsi l'équation (6) doit généralement donner pour une même valeur de x et y, au moins deux valeurs différentes de y', et deux de ces valeurs doivent devenir égales quand x et y se rapportent à un point de l'enveloppe, ou, en d'autres termes, satisfont à l'équation qui représente la solution singulière. On exprimera donc que l'équation (6) donne deux valeurs égales pour y', ce qui se fera en posant $\frac{df}{dy'}=0$, si $f(x,y,y')$ est une fonction dont la forme soit unique. Si sa forme était multiple, on pourrait la réduire à être unique, ce qui rentrerait dans le premier cas : on pourrait aussi traiter successivement chacune des équations distinctes renfermées dans $f(x, y, y')=0$, et exprimer qu'elles donnent des valeurs égales de y', ou bien qu'une valeur de y' tirée de l'une est égale à une valeur de y' tirée de l'autre. Si par exemple l'équation (6) était résolue par rapport à y', on ne pourrait employer que le dernier moyen et égaler ces valeurs deux à deux. Dans tous les cas, soit $\varphi(x,y,y')=0$ une équation exprimant que l'équation (6) donne deux valeurs égales de y', la solution singulière devra satisfaire à ces deux équations, et par conséquent au résultat de l'élimination de y' entre elles. Opérant donc cette élimination, on aura une équation entre x, y qui renfermera la solution singulière si elle existe. On vérifiera donc si les diverses valeurs de y en x qu'elle fournit satisfont à l'équation (6); et si l'on en trouve qui ne rentrent pas d'ailleurs dans l'intégrale générale, on connaîtra la solution singulière. Soit comme exemple

$$(7) \qquad y = xy' + f(y'),$$

f désignant une fonction qui n'ait qu'une seule valeur pour une même valeur de y'. Nous aurons, pour condi-

tion d'égalité de deux valeurs de y',

$$x + f'(y') = 0, \tag{8}$$

et il faudra éliminer y' entre ces deux équations. Il reste à vérifier que l'équation résultante en x, y satisfera à la proposée (7). En effet, supposons que de l'équation (8) on tire $y' = \varphi(x)$, et qu'on le reporte dans l'équation (7), on aura

$$y = x\varphi(x) + f[\varphi(x)]. \tag{9}$$

En la différentiant, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) + \varphi'(x)[x + f'\varphi(x)] = \varphi(x),$$

et, par conséquent, l'équation (9) pourrait s'écrire ainsi :

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Elle satisfait donc à l'équation différentielle proposée, et elle en forme la solution singulière; car elle ne rentre pas dans l'intégrale générale, que nous déterminerons plus tard.

Intégration des équations différentielles du premier ordre.

16. L'équation la plus générale du premier ordre, et dans laquelle le rapport différentiel $\frac{dy}{dx}$ ne passe pas le premier degré, peut se mettre sous la forme

$$Qdy + Pdx = 0, \quad \text{ou} \quad Q\frac{dy}{dx} + P = 0,$$

P et Q étant deux fonctions quelconques de x et y. On pourra toujours y appliquer le procédé général qui con-

siste à développer y au moyen du théorème de Taylor ou de Maclaurin. Il arrive quelquefois que la série peut être sommée; quelquefois aussi elle a une forme tellement compliquée, qu'on ne peut pas parvenir à la réduire à une forme finie. Voici quelques exemples dans lesquels ce procédé s'applique sans difficulté.

Soit

$$\frac{dy}{dx} + ay + bx^3 = 0.$$

En la différentiant un nombre indéfini de fois, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + 3bx^2 = 0,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a\frac{d^2y}{dx^2} + 6bx = 0,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a\frac{d^3y}{dx^3} + 6b = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^{4+m}y}{dx^{4+m}} + a\frac{d^{3+m}y}{dx^{3+m}} = 0.$$

Si l'on fait $x = 0$ dans toutes ces équations, il vient

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -ay_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = a^2y_0, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = -a^3y_0,$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = a^4y_0 - 6b, \quad \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_0 = -a^5y_0 + 6ba, \dots,$$

$$\left(\frac{d^{4+m}y}{dx^{4+m}}\right)_0 = -a\left(\frac{d^{3+m}y}{dx^{3+m}}\right)_0;$$

d'où

$$y = y_0\left(1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots\right)$$

$$-6b\left(\frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{ax^5}{1.2\dots5} + \frac{a^2x^6}{1\dots6}\dots\right), \dots,$$

ou

$$y = y_0 e^{-ax} - \frac{6b}{a^4}\left(e^{-ax} - 1 + ax - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3}\right),$$

ou, en observant que $y_0 - \frac{6b}{a^4}$ peut être remplacé par une constante arbitraire c,

$$y = ce^{-ax} + \frac{6b}{a^4}\left(1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3}\right).$$

L'intégrale générale étant connue, on obtiendrait les intégrales singulières par la méthode que nous avons exposée précédemment. Il est facile de voir qu'il n'en existe pas dans le cas actuel.

17. Soit encore $x\frac{dy}{dx} + y + ax^m = 0$, m étant entier et positif.

On obtient, par la différentiation,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + max^{m-1} = 0,$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + m(m-1)ax^{m-2} = 0,$$

. . . .

$$x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (m+1)\frac{d^my}{dx^m} + m(m-1)\ldots2.1a = 0,$$

$$x\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}} + (m+n)\frac{d^{m+n-1}y}{dx^{m+n-1}} = 0,$$

n étant plus grand que 1.

Si l'on fait $x = 0$, y et tous les coefficients différentiels deviennent nuls si l'on suppose qu'ils ne soient pas infinis, excepté $\frac{d^my}{dx^m}$ dont la valeur devient $-\frac{m(m-1)\ldots2.1.a}{m+1}$; on trouve donc $y = -\frac{ax^m}{m+1}$.

Cette intégrale n'a pas de constante arbitraire et n'est pas, par conséquent, l'intégrale générale. Celle-ci n'est donc pas développable suivant les puissances entières et positives de x. Et, en effet, si l'on intègre par les méthodes que nous ferons connaître tout à l'heure, on trouvera, pour l'intégrale générale,

$$y = \frac{C}{x} - \frac{ax^m}{m+1}.$$

La solution que nous avons trouvée est donc une intégrale particulière, correspondante à $c = 0$.

Il est facile de voir qu'il n'y a pas d'intégrale singulière.

Des facteurs propres à rendre immédiatement intégrable le premier membre de l'équation. Intégration de l'équation linéaire.

18. Si le premier membre de l'équation $Qdy + Pdx = 0$ était la différentielle d'une fonction de x et y, il serait nécessaire et suffisant que cette fonction fût égale à une constante pour que l'équation proposée fût satisfaite. La condition pour que cette circonstance ait lieu est, comme nous l'avons vu, $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$. Si elle n'a pas lieu, et qu'en multipliant le premier membre de l'équation par une fonction v, il devienne la différentielle d'une fonction u, cette équation sera équivalente à $\frac{1}{v} du = 0$, et sera satisfaite, soit en faisant $du = 0$, d'où $u = c$, ce qui sera l'intégrale générale, c étant la constante arbitraire ; soit en posant $\frac{1}{v} = 0$, ce qui donnera une solution singulière, si elle ne rentre pas dans la précédente.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$F(x) f(y) dy + \varphi(x) \psi(y) dx = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$F(x)\psi(y)\left[\frac{f(y)}{\psi(y)}dy+\frac{\varphi(x)}{F(x)}dx\right]=0,$$

et l'on y satisfait en posant, soit $F(x)=0$, soit $\psi(y)=0$, soit enfin

$$\frac{f(y)}{\psi(y)}dy+\frac{\varphi(x)}{F(x)}dx=0,$$

et le premier membre est une différentielle exacte, puisque les variables sont séparées.

19. On peut démontrer qu'il existe toujours un facteur qui rend $Qdy+Pdx$ différentielle exacte. En effet, il est démontré que l'équation proposée a une intégrale renfermant une constante arbitraire c, et que nous représenterons par $F(x, y, c)=0$; et l'équation différentielle a été obtenue nécessairement en éliminant c entre cette dernière et celle que l'on a obtenue en la différentiant, après l'avoir transformée préalablement d'une manière quelconque si on l'a jugé convenable. Or, quelque forme qu'on lui ait donnée, nous avons démontré précédemment, qu'après l'élimination de c, l'équation à laquelle on sera parvenu donnera identiquement en x et y la même valeur pour $\frac{dy}{dx}$.

Cela posé, concevons l'équation $F(x, y, c)=0$ mise sous la forme $\varphi(x, y)=c$, d'où $\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0$; la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette équation, et celle que donne l'équation proposée devant être égales, quels que soient x et y (n° 62), on aura identiquement

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}=\frac{P}{Q}.$$

Ajoutant de part et d'autre $\frac{dy}{dx}$ et multipliant par $\frac{d\varphi}{dy}$, on aura cette nouvelle identité, quels que soient x, y, dx, dy,

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{P}{Q}\right)\frac{d\varphi}{dy}.$$

Le premier membre étant la dérivée totale d'une fonction φ de x et y, il en est de même du second; et, par conséquent, en multipliant la proposée par $\frac{1}{Q}\cdot\frac{d\varphi}{dy}$, son premier membre devient une différentielle exacte. On voit, de plus, comment le facteur $v = \frac{1}{Q}\frac{d\varphi}{dy}$ est lié au premier membre de l'intégrale mise sous la forme $\varphi = c$.

20. L'existence du facteur v étant démontrée, il faut chercher comment il est possible de le découvrir.

Il est facile de former l'équation qui doit le déterminer, car on doit avoir l'identité

$$d\frac{vQ}{dx} = d\frac{vP}{dy}, \quad \text{ou} \quad Q\frac{dv}{dx} - P\frac{dv}{dy} = v\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Si v renferme à la fois x et y, cette équation est aux différentielles partielles, et plus difficile à intégrer que la proposée. Il faut donc renoncer, en général, à la détermination de ce facteur.

Mais si v ne doit renfermer qu'une variable, x par exemple, il est facile d'en déterminer la valeur. En effet, $\frac{dv}{dy}$ étant nul, l'équation précédente devient

$$Q\frac{dv}{dx} = v\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

ou

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right);$$

il est donc nécessaire que les cofficients donnés P et Q soient tels que l'expression $\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)$ soit indépendante de y.

Lorsque cette condition sera remplie, on aura, en désignant par $\varphi(x)$ l'expression précédente,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\varphi(x),$$

d'où

$$\log\frac{v}{c}=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx,$$

le coefficient c étant arbitraire, et disparaissant d'ailleurs de lui-même.

En intégrant, par les procédés relatifs aux différentielles des fonctions de deux variables indépendantes, on trouve

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx}dx+\int_{y_0}^{y}\mathrm{Q}_0dy=\mathrm{C}.$$

La discussion serait la même pour les facteurs indépendants de x.

21. Le calcul précédent deviendrait plus simple s'il s'agissait de l'équation $dy+\mathrm{P}dx=0$. Il faudrait alors que $\frac{dP}{dy}$ fût indépendant de y; ce qui donnerait

$$\mathrm{P}=\mathrm{X}y+\mathrm{X}_1,$$

X et X_1 désignant des fonctions quelconques de x. L'équation doit donc être de la forme

$$dy+(\mathrm{X}y+\mathrm{X}_1)dx=0.$$

En multipliant par le facteur v, qui devient $e^{\int \mathrm{X}dx}$, on a

$$e^{\int \mathrm{X}dx}dy+\mathrm{X}ye^{\int \mathrm{X}dx}dx+\mathrm{X}_1e^{\int \mathrm{X}dx}dx=0;$$

d'où

$$ye^{\int X dx} + \int X_1 dx e^{\int X dx} dx = C,$$

C désignant une constante arbitraire. On tire de là

$$y = e^{-\int X dx}\left(C - \int X_1 e^{\int X dx} dx\right).$$

Telle est l'intégrale générale de l'*équation linéaire du premier ordre*. La constante arbitraire provenant de $\int X dx$ disparaît d'elle-même, et la constante C est la seule qui entre dans la valeur de y.

Considérons, comme application très-simple, la question suivante qui a été proposée aux géomètres par M. de Beaune, ami de Descartes :

Trouver une courbe telle que la sous-tangente soit à l'ordonnée comme une ligne constante est à l'ordonnée de cette courbe, diminuée de celle d'une droite inclinée d'un demi-angle droit sur l'axe des x.

En prenant l'origine au point de rencontre de cette droite et de l'axe des x, elle aura pour équation $x = y$, et la condition donnée sera représentée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{a}, \quad \text{ou} \quad a\frac{dy}{dx} - y = -x,$$

a étant la valeur donnée de la ligne constante.

Cette équation linéaire, intégrée par un quelconque des procédés que nous avons indiqués, donne

$$y = x + a\,Ce^{\frac{x}{a}},$$

C étant une constante arbitraire.

Si maintenant on prend pour axe des x' la droite dont l'équation est $y = x + a$, et que l'on conserve la même direction pour l'axe des y', on aura

$$y' = Ce^{\frac{x}{a}}, \quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}}, \quad \text{et par suite} \quad y' = Ce^{\frac{x'}{a\sqrt{2}}}.$$

La courbe est donc une logarithmique dont les ordonnées font avec l'axe un angle égal à un demi-angle droit.

22. Nous avons prouvé qu'il existe dans tous les cas un facteur propre à rendre le premier membre intégrable. Voyons s'il n'en existe qu'un seul.

Soit v une première fonction telle que $v(Qdy + Pdx)$ soit la différentielle d'une fonction u de x et y; il est d'abord évident que le facteur $v\varphi(u)$ rendra encore le premier membre intégrable : car, puisque $v(Qdy + Pdx) = du$, on aura $v\varphi(u)(Qdy + Pdx) = \varphi(u)\,du$, ce qui est la différentielle de $\int\varphi(u)\,du$.

Soit maintenant V une autre fonction quelconque telle que $V(Qdy + Pdx) = dU$, U désignant une fonction de x et y. On en déduit l'identité

$$\frac{V}{v}\,du = dU.$$

Or, le second membre étant une différentielle exacte, le premier qui lui est identique en x et y devrait aussi en être une; ce qui ne saurait être si $\frac{V}{v}$ n'était pas une fonction de la fonction u seulement. Ce dernier point, qu'on admet assez ordinairement comme évident, a cependant besoin d'être plus rigoureusement établi.

Il s'agit de prouver généralement que si l'on a $u = f(x, y)$, l'expression $F(x, y)\,du$, ou $F(x, y)\left[\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dx}dy\right]$ ne peut être une différentielle exacte relativement aux deux variables x et y, si l'on n'a pas

$$F(x, y) = \psi(u) = \psi[f(x, y)],$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction ψ.

En effet, éliminons y au moyen de l'équation $u = f(x, y)$; $F(x, y)$ deviendra une fonction de u et x, $\varphi(u, x)$. L'expression qui était une différentielle exacte relativement

à x et y le sera relativement à x et u; $\varphi(u, x)\,du$ sera donc une différentielle exacte d'une fonction des deux variables indépendantes x et u; ce qui serait absurde si x restait dans cette expression qui ne renferme pas dx. Il faut donc que $\varphi(u, x)$ ne renferme que u, et, par conséquent, que $F(x, y)$ soit une fonction de u ou de $f(x, y)$.

Ainsi, en revenant à notre question particulière, si un facteur ν donne au premier membre la forme de la différentielle d'une fonction u de x, y, les facteurs qui jouissent exclusivement de la même propriété seront de la forme $\nu\varphi(u)$, φ désignant une fonction arbitraire.

L'équation proposée devient ainsi

$$du = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(u)\,du = 0,$$

d'où l'on déduit également $u = c$, c désignant une constante arbitraire.

Tous ces facteurs conduisent donc au même résultat, et ils ne diffèrent entre eux que par le facteur $\varphi(u)$ qui est bien une fonction de x, y, mais qui se réduit à une constante arbitraire en vertu de l'intégrale $u = c$. On voit que, si l'on connaissait deux facteurs différents qui rendissent le premier membre de l'équation intégrable, en égalant leur rapport à une constante arbitraire, on obtiendrait l'intégrale générale.

Intégration des équations homogènes, et de l'équation linéaire, par la séparation des variables.

23. On parvient quelquefois, par un changement de variables, à ramener aux quadratures l'intégration de l'équation donnée, c'est-à-dire à séparer les nouvelles variables dans l'équation transformée.

Considérons d'abord une équation homogène quelconque

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

c'est-à-dire telle que M et N soient des fonctions homogènes du même ordre m de x, y. On sait qu'une fonction homogène de l'ordre m des variables $x, y, z, \ldots$ est celle qui se trouve multipliée par le facteur g^m quand on change respectivement les variables en gx, gy, gz, etc.

Posons $y = ux$, d'où $dy = udx + xdu$.

Les fonctions M et N seront égales à x^m multiplié par des fonctions de u; et l'équation divisée par x^m prend la forme

$$F(u)\,dx + f(u)\,(udx + xdu) = 0,$$

ou

$$[F(u) + uf(u)]\,dx + xf(u)\,du = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{x} + \frac{f(u)\,du}{F(u) + uf(u)} = 0,$$

et les variables sont séparées.

Le premier membre est devenu une différentielle exacte, en le divisant d'abord par x^m, puis par

$$x[F(u) + uf(u)], \quad \text{ou} \quad xF\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Donc, en somme, il a été divisé par $Mx + Ny$.

Ainsi, le facteur propre à rendre le premier membre immédiatement intégrable est $\frac{1}{Mx+Ny}$. Si $Mdx + Ndy$ était une différentielle exacte, $\frac{1}{Mx+Ny}$ et 1 seraient deux facteurs qui rendraient le premier membre intégrable; leur rapport serait donc égal à une constante, et l'intégrale générale serait, par conséquent, $Mx + Ny = c$.

24. L'expression $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ étant une différentielle exacte, la condition connue conduit à l'équation

$$\frac{x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy}}{M} = \frac{x\frac{dN}{dx} + y\frac{dN}{dy}}{N}.$$

Ainsi, quelle que soit la fonction homogène M de l'ordre m, l'expression $\frac{x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy}}{M}$ est constante. On en connaîtra la valeur en prenant la fonction particulière x^m, et l'on trouve m. Donc on aura généralement

$$x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy}=mM,$$

et l'on retrouve ainsi le théorème des fonctions homogènes.

25. *Premier exemple.* — Soit

$$(ax+by)\,dx=(mx+ny)\,dy.$$

En posant

$$y=ux,\quad \text{d'où}\quad dy=udx+xdu,$$

l'équation proposée $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{mx+ny}$ deviendra

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{a+bu}{m+nu},\quad \text{ou}\quad x\frac{du}{dx}=\frac{a+(b-m)u-nu^2}{m+nu},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{x}=\frac{(m+nu)}{a+(b-m)u-nu^2}\,du;$$

les variables étant séparées, on intégrera les deux membres, ce qui n'offrira aucune difficulté. On remplacera ensuite u par $\frac{y}{x}$, et l'on aura l'intégrale générale de l'équation proposée.

26. *Deuxième exemple.* — Soit

$$xdy-ydx=dx\sqrt{x^2+y^2}.$$

Cette équation étant encore homogène relativement à x et y, on posera $y=ux$, et l'on obtiendra, toute réduc-

tion faite,

$$xdu = dx\sqrt{1+u^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}};$$

intégrant les deux membres, et désignant par c une constante arbitraire, il vient

$$\log\frac{x}{c} = \log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right),$$

d'où

$$x = c\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = c\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right).$$

On en tire successivement

$$x^2 = c\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right), \quad (x^2 - cy)^2 = c^2(x^2+y^2),$$

et enfin

$$x^2 = 2cy + c^2.$$

27. *Troisième exemple.* — On peut quelquefois, par une transformation simple, rendre homogène une équation qui ne l'est pas. Soit, par exemple,

$$(ax + by + m)\,dx = (px + qy + n)\,dy,$$

pour faire disparaître les termes indépendants de x et y; soit

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad \text{d'où} \quad dx = dx', \quad dy = dy',$$

et déterminons α et β par les deux conditions

$$a\alpha + b\beta + m = 0, \quad p\alpha + q\beta + n = 0,$$

qui donnent

$$\alpha = \frac{nb - mq}{aq - bp}, \quad \beta = \frac{mp - na}{aq - bp},$$

et supposons d'abord que l'on n'ait pas $aq - bp = 0$.

L'équation proposée se trouvera ramenée à la suivante :

$$(ax' + by')\,dx' = (px' + qy')\,dy',$$

qui est homogène, et que l'on intégrera comme précédemment ; puis on remplacera x' et y' par $x - \alpha$, $y - \beta$. Mais cette transformation serait impossible si l'on avait $aq - bp = 0$. Dans ce cas, l'équation proposée devient, en remplaçant q par sa valeur $\frac{bp}{a}$,

$$(ax + by)\,adx - pdy) = a(ndy - mdx).$$

On posera alors

$$ax + by = z, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{dz - adx}{b},$$

et l'élimination de y donnera

$$adx = \frac{(an + pz)\,dz}{an + mb + (b + p)\,z};$$

les variables étant séparées, le problème est ramené à celui des quadratures.

Dans le cas général, on aurait encore pu rendre l'équation homogène, en posant

$$ax + by + m = t, \quad px + qy + n = u,$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{qdt - bdu}{aq - bp}, \quad dy = \frac{adu - pdt}{aq - bp},$$

et l'équation proposée se trouve transformée dans la suivante, qui est homogène :

$$(pu + qt)\,dt = (au + bt)\,du.$$

28. Prenons pour application géométrique une question qui a beaucoup occupé les géomètres, à l'origine du calcul intégral, et qu'ils appelaient le *problème des tra-*

jectoires. Il s'agit de trouver une courbe qui coupe, sous un angle donné, toutes celles qui sont renfermées dans une équation donnée

$$(1) \qquad F(x, y, a) = 0,$$

dans laquelle le paramètre a peut prendre toutes les valeurs possibles.

Si l'on désigne par m la tangente de l'angle donné, par x', y' les coordonnées d'un point quelconque du lieu, et par α l'angle que forme avec l'axe des x la tangente à la courbe donnée, on devra avoir

$$(2) \qquad m = \frac{\frac{dy'}{dx'} - \text{tang}\,\alpha}{1 + \frac{dy'}{dx'}\,\text{tang}\,\alpha}.$$

Or l'équation (1) donne

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}};$$

l'équation (2) deviendra donc

$$(3) \qquad m\left(\frac{dF}{dy'} - \frac{dF}{dx'}\frac{dy'}{dx'}\right) - \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dx'} - \frac{dF}{dx'} = 0,$$

et comme on a en même temps

$$F(x', y' a) = 0,$$

si l'on élimine a entre cette équation et l'équation (3), on aura une équation entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu.

Examinons en particulier le cas où l'équation (1) est de la forme

$$(4) \qquad y^n = ax^p,$$

on aura

$$\frac{dF}{dx} = -apx^{p-1}, \quad \frac{dF}{dy} = ny^{n-1},$$

et l'équation (3) deviendra

$$m\left(ny^{n-1} + apx^{p-1}\frac{dy}{dx}\right) - ny^{n-1}\frac{dy}{dx} + apx^{p-1} = 0,$$

et, éliminant a entre cette équation et la première, on obtient

$$(5) \qquad m\left(nx + py\frac{dy}{dx}\right) - nx\frac{dy}{dx} + py = 0,$$

équation homogène qu'on intégrera sans difficulté.

1°. Supposons, par exemple, $n = p = 1$, l'équation donnée (4) devient

$$y = ax,$$

et représente toutes les droites qui passent par l'origine. L'équation (5) devient

$$m(xdx + ydy) - xdy + ydx = 0.$$

On reconnaît ici que le premier membre devient une différentielle exacte, en le divisant par $x^2 + y^2$. On aura donc, en intégrant,

$$m \log (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \text{arc tang}\frac{y}{x} = c.$$

Si l'on passe à des coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

on trouve

$$m \log r = \theta + c,$$

d'où

$$r = c^{\frac{\theta+c}{m}},$$

ou, en faisant $e^{\frac{c}{m}} = c'$,

$$r = c' e^{\frac{\theta}{m}}.$$

On obtient ainsi une infinité de spirales logarithmiques semblables, ayant le même point asymptote.

2°. Supposons $m = \infty$, ce qui donne des *trajectoires orthogonales*; l'équation (5) se réduit à

$$nx + py \frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire

$$nx^2 + py^2 = c.$$

Suivant que n et p seront de mêmes signes ou de signes contraires, cette équation donnera une infinité d'ellipses ou d'hyperboles semblables, et qui seront les seules courbes jouissant de la propriété de couper à angle droit toutes les paraboles ou les hyperboles renfermées dans l'équation

$$y^n = ax^p.$$

Si l'on a, de plus, $n = p = 1$, la trajectoire a pour équation

$$x^2 + y^2 = c,$$

ce qui donne un cercle quelconque ayant pour centre le point de concours des droites représentées par l'équation donnée

$$y = ax.$$

Si $n = -p = 1$, les courbes données ont pour équation $y = \frac{a}{x}$, et sont toutes les hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les axes de coordonnées. Les trajectoires ont pour équation générale $x^2 - y^2 = c$, et sont toutes les hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les bissectrices des angles des asymptotes des premières.

29. *Équation linéaire.* — On peut encore, par un changement de variables, intégrer l'équation linéaire du premier ordre

$$dy + Xydx + X_1dx = 0.$$

Soit $y = uz$; u et z étant des fonctions de x indéterminées, on aura $dy = udz + zdu$, et, en substituant,

$$udz + zdu + Xuzdx + X_1dx = 0.$$

On peut déterminer d'abord u d'après la condition $du + Xudx = 0$, et il en résultera $udz + X_1dx = 0$. Or les variables se séparent dans l'avant-dernière, en divisant par u; ce qui donne $\frac{du}{u} + Xdx = 0$.

En intégrant, il vient $\log u + \int Xdx = 0$, la constante arbitraire étant comprise dans l'intégrale indéfinie.

On tire de là $u = e^{-\int Xdx}$; substituant dans l'équation $udz + X_1dx = 0$, il vient

$$e^{-\int Xdx}dz + X_1dx = 0, \quad \text{d'où} \quad z = -\int X_1e^{\int Xdx}dx + C,$$

C étant la constante arbitraire relative à la nouvelle intégrale, qui sera prise à partir de telle limite que l'on voudra. On aura ainsi

$$y = e^{-\int Xdx}\left(C - \int X_1e^{\int Xdx}dx\right).$$

La constante arbitraire de $\int Xdx$ disparaît d'elle-même de cette expression, et il n'en reste qu'une, comme cela doit être. On retrouve ainsi l'intégrale déjà donnée par une autre méthode.

30. *Équation de Bernoulli.* — On peut ramener à l'équation linéaire la suivante, qui a été traitée d'abord par Jacques Bernoulli :

$$dy + Xydx = X_1y^{n+1}dx.$$

Si l'on pose

$$z = y^{-n},\quad \text{d'où}\quad y = z^{-\frac{1}{n}},\quad \text{et, par suite,}\quad dy = -\frac{1}{n} z^{-\frac{1}{n}-1} dz,$$

on trouve, en substituant dans la proposée et réduisant,

$$dz - nXz\,dx + nX_1\,dx = 0,$$

équation linéaire dont l'intégrale est, d'après la formule précédente,

$$z = e^{n\int X dx}\left(C - n\int X_1 e^{n\int X dx}\right) = \frac{1}{y^n}.$$

La valeur de y s'en déduit immédiatement.

On peut arriver au même résultat par une autre transformation, déjà employée pour l'équation linéaire.

Soit $y = uz$; l'équation proposée devient

$$u\,dz + z\,du + Xuz\,dx = X_1 u^{n+1} z^{n+1} dx,$$

et peut se partager dans les deux suivantes :

$$dz + Xz\,dx = 0,\quad du = X_1 u^{n+1} z^n\,dx;$$

d'où l'on tire

$$z = e^{-\int X dx},\quad u^{-n} = -n\left(\int_{x_0}^{x} X_1 e^{-n\int X dx} dx + C\right),$$

l'intégrale $\int X dx$ étant indéfinie. On en déduit

$$\frac{1}{y^n} = -ne^{n\int X dx}\left(\int_{x_0}^{x} X_1 e^{-n\int X dx} dx + C\right).$$

La constante introduite par $\int X dx$ disparaît évidemment, de sorte qu'on peut prendre cette intégrale à partir d'une valeur quelconque; y ne contiendra donc que la seule constante C.

On peut quelquefois déterminer l'intégrale générale d'une équation du premier ordre, dont on connaît une

intégrale particulière, au moyen d'une transformation très-simple, employée par Euler.

Soit, par exemple,

$$dy + Xydx = X_1y^2dx + X_2\,dx.$$

Cette équation a de plus que la précédente le terme X_2dx, mais l'exposant $n+1$ a la valeur particulière 2. Supposons que z soit une fonction de x qui satisfasse à cette équation sans renfermer de constante arbitraire, et posons $y = z + u$, u étant une fonction inconnue de x. En ayant égard à l'équation

$$dz + Xzdx = X_1z^2dx + X_2\,dx,$$

qui a lieu par hypothèse, il restera

$$du + (X - 2zX_1)udx = X_1u^2dx.$$

Cette équation étant renfermée dans celle qui vient d'être intégrée, on en tirera la valeur de u, avec une constante arbitraire, et l'on connaîtra, par suite, la valeur générale de y.

Si l'on n'avait pas $n+1=2$, la même substitution ferait encore disparaître X_2dx, mais elle introduirait de nouvelles puissances de y qui ne permettraient plus d'intégrer la transformée.

Équations du premier ordre, dans lesquelles la dérivée entre à un degré supérieur au premier.

31. Si l'équation renferme $\frac{dy}{dx}$ à des puissances supérieures à la première, et qu'elle puisse être résolue par rapport à cette quantité, on aura ainsi plusieurs équations de la forme $Pdx + Qdy = 0$ que l'on tâchera d'intégrer. Soient $\varphi(x, y, c) = 0$, $\varphi_1(x, y, c') = 0$, etc., ces diverses intégrales dans lesquelles c désigne une constante arbi-



traire; toutes les solutions de l'équation proposée seront renfermées dans la suivante :

$$\varphi(x, y, c).\varphi_1(x, y, c')\ldots = 0.$$

On pourra effectuer les calculs en considérant la constante c comme la même dans les différents facteurs; car, comme ils ne doivent être égalés à zéro que séparément, on n'altère en rien les solutions en représentant les constantes par la même lettre.

Soit, par exemple,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \pm a;$$

on aura les deux intégrales

$$y = ax + c, \quad y = -ax + c',$$

et l'intégrale complète sera

$$(y - ax + c).(y + ax - c') = 0,$$

ou, ce qui est plus simple, sans être moins général,

$$(y - ax - c)(y + ax - c) = 0, \quad \text{ou} \quad (y - c)^2 - a^2x^2 = 0.$$

32. Lorsque l'équation ne peut être résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, et qu'elle peut l'être par rapport à y ou x, on a à considérer l'une des deux formes générales

$$y = \text{F}(x, p), \quad x = \text{F}(y, p),$$

p désignant le rapport différentiel $\frac{dy}{dx}$. Dans l'un et l'autre cas, la différentiation conduit à une équation du premier ordre entre deux variables p et x, ou p et y. Si l'on peut en trouver une intégrale première dans laquelle ne rentre pas la proposée, on éliminera p entre elle et l'équation proposée, et l'on aura l'intégrale générale cherchée

Ce procédé conduit à une simple quadrature lorsque le second membre ne contient que la variable p.

33. Si l'équation a la forme

$$y = x\text{F}(p) + f(p),$$

la différentiation donne

$$pdx = \text{F}(p)\,dx + x\text{F}'(p)\,dp + f'(p)\,dp.$$

Cette équation, étant du second ordre, a deux intégrales du premier : l'une, qui coïnciderait avec la proposée augmentée d'une constante ; l'autre, que l'on obtiendra par de simples quadratures, en observant que cette équation est linéaire par rapport à x et dx. Éliminant p entre cette intégrale et l'équation donnée, on aura l'intégrale générale, et l'on en déduira les intégrales singulières d'après la théorie exposée précédemment.

34. Dans le cas particulier où $\text{F}(p) = p$, on a

$$y = px + f(p);$$

en différentiant, il vient

$$\text{o} = [x + f'(p)]\,dp,$$

équation à laquelle on satisfait de deux manières.

Si l'on pose $dp = \text{o}$, il vient $p = c$, et éliminant p, on a pour l'intégrale générale

$$y = cx + f(c).$$

Si l'on pose $x + f'(p) = \text{o}$, et que l'on élimine p entre cette équation et la proposée, on aura l'intégrale singulière ; car la valeur de p tirée de la dernière équation sera une fonction de x, et l'élimination conduira au même résultat qu'en substituant cette fonction de z à c dans l'intégrale générale : la solution qu'on obtient ne résulte donc pas d'une valeur particulière attribuée à la constante.

On voit d'ailleurs qu'éliminer p entre $x+f'(p)=0$ et $y=px+f(p)$ revient à éliminer c entre

$$x+f'(c)=0, \quad \text{et} \quad y=cx+f'(c);$$

et comme $x+f'(c)$ est la dérivée de $cx+f(c)$, par rapport à c, on parviendra à la solution singulière de l'équation dont $y=cx+f(c)$ est l'intégrale générale.

35. Nous allons appliquer à la résolution de quelques questions géométriques le procédé que nous venons de faire connaître.

Soit proposé de trouver une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes sur une quelconque de ses tangentes soit constant.

Désignons par $2c$ la distance de ces deux points, et par b^2 le produit des perpendiculaires; prenons pour origine le milieu entre les deux points donnés, et pour axe des x la droite qui les joint : la condition donnée conduira immédiatement à l'équation

$$\frac{(y-px)^2-c^2p^2}{1+p^2}=\pm b^2,$$

le signe supérieur correspondant au cas où les deux points sont d'un même côté de la tangente, et le signe inférieur, à celui où ils sont de côtés différents. On tire de cette équation

$$(1) \qquad y=px+\sqrt{(c^2\pm b^2)p^2\pm b^2};$$

ce qui est un cas particulier de l'équation $y=px+f(p)$. En suivant la marche indiquée généralement, on trouve

$$(2) \qquad dp\left[x+\frac{p(c^2\pm b^2)}{\sqrt{(c^2\pm b^2)p^2\pm b^2}}\right]=0;$$

posant $dp=0$, d'où $p=\alpha$, α désignant une constante arbitraire; puis éliminant p entre cette dernière équation

et l'équation (1), on aura l'intégrale générale

$$y = \alpha x + \sqrt{(c^2 \pm b^2)\,\alpha^2 \pm b^2},$$

qui représente une infinité de droites, tangentes à la courbe ayant pour équation

$$(3) \qquad (c^2 \pm b^2)\,y^2 \pm b^2x^2 = \pm (c^2 \pm b^2)\,b^2;$$

d'où l'on peut déjà conclure que cette courbe est la solution singulière, puisqu'elle est l'enveloppe des intégrales particulières.

Dans le cas où l'on prend les signes supérieurs, elle n'est autre chose qu'une ellipse dont les foyers sont les deux points donnés, et dont le petit axe est égal à $2b$. Si l'on prend les signes inférieurs, les deux points étant de côtés différents de la tangente, les perpendiculaires sont respectivement moindres que les segments de la droite égale à $2c$, d'où résulte $c < b$. La courbe est donc alors une hyperbole ayant pour foyers les deux points donnés, et pour axe imaginaire $2b$.

Le second facteur de l'équation (2) doit aussi donner la solution singulière, comme cela a été démontré généralement. En l'égalant à zéro, on a

$$(4) \qquad x + \frac{p\,(c^2 \pm b^2)}{\sqrt{(c^2 \pm b^2)\,p^2 \pm b^2}} = 0.$$

Éliminant p entre les équations (1) et (4), on retrouve l'équation (3), comme cela devait être.

Dans cette question, la courbe que l'on avait en vue de déterminer est donnée, non par l'intégrale générale, mais par la solution singulière; ce qui montre que cette dernière doit toujours être cherchée avec le même soin que la première.

36. *On donne deux parallèles, et sur chacune d'elles un point fixe, et l'on demande l'équation de la courbe*

telle, qu'en lui menant une tangente quelconque, les segments déterminés sur chaque parallèle entre le point fixe et le point de rencontre avec la tangente donnent un produit constant b^2.

Soit $2a$ la distance des deux points fixes; prenons l'origine en son milieu, l'axe des x suivant sa direction, et l'axe des y parallèle aux deux lignes données.

La condition donnée fournit l'équation

$$(y - px)^2 - a^2p^2 = \pm b^2.$$

Le signe + du second membre se rapporte au cas où les deux segments seraient d'un même côté de l'axe des x, et le signe — au cas où ils seraient de côtés différents.

On tire de cette équation,

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2},$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2 \pm b^2}}\right) = 0.$$

On aura l'intégrale générale en posant

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad p = \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire, et substituant α à p dans l'équation différentielle de la courbe; ce qui donne

$$y = \alpha x + \sqrt{a^2\alpha^2 \pm b^2}.$$

On aura la solution singulière en éliminant p entre l'équation différentielle de la courbe et la suivante

$$x + \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2 \pm b^2}} = 0.$$

Ce calcul conduit à l'équation

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

qui représente une ellipse ou une hyperbole, rapportée à un système de diamètres conjugués, suivant que l'on prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

L'intégrale générale représente toutes les tangentes à l'une ou à l'autre de ces deux courbes.

37. Proposons-nous encore de *déterminer la courbe telle que la partie de chacune de ses tangentes, interceptée entre deux droites rectangulaires, soit égale à une quantité donnée a.*

En prenant les deux droites rectangulaires pour axes de coordonnées, on est conduit à l'équation

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

le radical comportant le double signe. On trouve, en la différentiant,

$$dp\left[x + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0.$$

L'intégrale générale sera, en désignant par c une constante arbitraire,

$$y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}};$$

on obtiendra la solution singulière en éliminant p entre l'équation différentielle de la courbe et la suivante

$$x + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

On tirera d'abord

$$(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

qui, remis dans la première, donne

$$y = px^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right);$$

tirant de là la valeur de p, et la substituant dans la précédente, on parvient à l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

dont la discussion est très-facile.

Nous allons démontrer maintenant que cette courbe n'est autre que l'épicycloïde qui serait engendrée par un point d'un cercle ayant pour rayon $\frac{a}{4}$ et roulant intérieurement sur un cercle de rayon a.

En effet, soit OB (*fig.* 1) un rayon quelconque d'un cercle ayant pour rayon a; décrivons un cercle qui ait pour diamètre BC, moitié de OB, et prenons l'arc BM égal à l'arc BA, A étant un point fixe du premier cercle; le point M appartiendra à l'épicycloïde en question, et il s'agit de prouver que la partie de sa tangente au point quelconque M, qui sera comprise dans l'angle droit YOX, est égale à a.

Or, la normale à cette courbe étant BM, la tangente sera MC, et il faut prouver que l'on a LN $= a$.

Remarquons pour cela que, d'après la théorie de la mesure des angles, et la condition AB $=$ BM, l'angle BCM est double de NOC, et par conséquent NOC $=$ CNO; d'où CN $=$ CO.

On prouverait de même que l'angle LCB est double de LOC, et que, par conséquent, LOC $=$ OLC; d'où LC $=$ OC et, par conséquent, LN $= a$; ce qu'il fallait démontrer.

Équations différentielles totales.

38. La première question que nous avons traitée dans le calcul intégral a eu pour objet de trouver une fonction d'une seule variable, lorsqu'on connaît l'expression de sa différentielle au moyen de cette variable seulement.

Nous avons considéré ensuite les fonctions de plusieurs variables indépendantes, et nous nous sommes proposé de les déterminer, connaissant l'expression de leur différentielle totale, ou, en d'autres termes, de toutes leurs dérivées partielles du premier ordre. Revenant ensuite au premier problème, nous l'avons étendu au cas où la différentielle par rapport à la variable indépendante unique renfermait dans son expression la fonction elle-même mêlée avec la variable indépendante : c'est ce qui constitue l'intégration des équations différentielles à deux variables. Nous allons maintenant étendre de la même manière le second problème, et supposer que la différentielle totale de la fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes renferme la fonction mêlée avec ces variables. Les équations qui donnent une pareille expression à la différentielle de la fonction cherchée se nomment *équations différentielles totales*. Nous nous bornerons à celles qui renferment trois variables.

Leur forme la plus générale est

$$(1)\quad Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad \text{ou} \quad dx = -\frac{Q}{P}dy - \frac{R}{P}dz;$$

x sera considéré comme la fonction des variables indépendantes y, z, et la différentielle totale de x renfermera à la fois cette fonction et les variables indépendantes, P, Q, R étant des fonctions quelconques de x, y, z.

Si l'on connaissait la valeur de x en y et z, en la remettant dans ces trois fonctions, $-\frac{Q}{P}$ et $-\frac{R}{P}$ seraient identiquement les dérivées partielles de x par rapport à y et z. Donc d'abord, si l'on cherche la fonction la plus générale de y qui satisfasse à la condition que sa dérivée, par rapport à y, soit $-\frac{Q}{P}$, z étant considéré comme une constante, la valeur cherchée de x sera renfermée dans celle

que l'on aura ainsi déterminée; et il ne restera plus qu'à l'assujettir à satisfaire à la seconde condition.

Il faut donc d'abord intégrer l'équation $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$, ou

$$Pdx + Qdy = 0,$$

dans laquelle z est une constante. Ce problème rentre dans la théorie précédente; et, en le supposant résolu, on aura une équation $U = 0$ entre x, y, z, C; C désignant une quantité arbitraire, indépendante de x, y, mais qui peut renfermer z d'une manière quelconque; et il s'agit maintenant de déterminer C, s'il est possible, de manière que la dérivée partielle de x, par rapport à z, soit identiquement $-\frac{R}{P}$, au moins, lorsqu'on aura substitué à x sa valeur tirée de $U = 0$.

Différentiant l'équation $U = 0$, en traitant y comme constant, il vient

$$\frac{dU}{dz} + \frac{dU}{dx}\left(\frac{dx}{dz}\right) + \frac{dU}{dC}\frac{dC}{dz} = 0;$$

et substituant à $\frac{dx}{dz}$ la valeur $-\frac{R}{P}$ qu'il doit avoir, il sera nécessaire et suffisant de satisfaire à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dU}{dz} - \frac{R}{P}\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dC}\frac{dC}{dz} = 0,$$

dans laquelle x est censé remplacé par sa valeur.

Mais, comme C ne doit pas renfermer y, il est nécessaire que la substitution de x dans cette équation en fasse disparaître y. Si cela n'a pas lieu, le problème est impossible; et si cela a lieu, on a une équation différentielle du premier ordre entre C et z. Son intégrale générale renfermera une constante arbitraire; et reportant la valeur de C qu'on en déduira, dans l'équation $U = 0$, on aura

l'équation qui détermine x de manière à satisfaire aux conditions proposées.

On voit que la question n'est pas toujours susceptible d'une solution, et que, quand elle en a une, l'intégrale est donnée par une équation entre x, y, z, qui renferme une constante arbitraire, et que l'on obtient par l'intégration de deux équations du premier ordre, à deux variables.

39. Il suit de là que quand la question proposée est possible, l'équation différentielle résulte de l'élimination d'une constante arbitraire entre une équation à trois variables et sa différentielle totale égalée à zéro; et cette considération va nous conduire à une proposition importante.

Soit $V = C'$ l'intégrale de l'équation (1) résolue par rapport à la constante arbitraire C'. En la différentiant, l'élimination de C' se trouvera effectuée, et le résultat sera identiquement le même que si l'élimination s'était faite autrement.

L'équation

$$(3) \qquad \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = 0$$

devra donc être identique avec l'équation (1), lorsqu'on aura réduit le coefficient de la même différentielle, par exemple de dx, à avoir la même valeur de part et d'autre.

Multipliant donc l'équation (1) par $\frac{\frac{dV}{dx}}{P}$, elle deviendra identique avec (3), et son premier membre sera, par conséquent, la différentielle exacte d'une fonction V des trois variables indépendantes x, y, z. D'où se tire cette conséquence, que *lorsque la question admet une solution, le premier membre de l'équation donnée devient une différentielle exacte, quand on le multiplie par une certaine fonction des trois variables*

Soit μ le facteur tel que $\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz$ soit une différentielle exacte, on aura les trois conditions suivantes :

$$\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx}, \quad \frac{d.\mu P}{dz} = \frac{d.\mu R}{dx}, \quad \frac{d.\mu Q}{dz} = \frac{d.\mu R}{dy},$$

ou, en les développant,

$$\mu\frac{dP}{dy} + P\frac{d\mu}{dy} = \mu\frac{dQ}{dx} + Q\frac{d\mu}{dx},$$

$$\mu\frac{dP}{dz} + R\frac{d\mu}{dz} = \mu\frac{dR}{dx} + P\frac{d\mu}{dx},$$

$$\mu\frac{dQ}{dz} + Q\frac{d\mu}{dz} = \mu\frac{dR}{dy} + R\frac{d\mu}{dy}.$$

Si l'on multiplie la première par R, la seconde par $-Q$, la troisième par P, qu'on les ajoute ensuite, et que l'on supprime le facteur μ, on devra avoir identiquement

$$(4)\quad P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Il sera donc inutile de chercher à résoudre la question quand cette identité, facile à vérifier, n'aura pas lieu.

Réciproquement, toutes les fois qu'elle aura lieu, la question admet une solution; car nous allons démontrer que dans ce cas le premier membre de l'équation (2) devient indépendant de y quand on en élimine x.

Mais, pour plus de simplicité, nous supposerons que l'équation $U = 0$ ait été résolue par rapport à la constante C, et soit remplacée par $U = C$, ce qui ne changera rien aux conditions. L'équation (2) se change alors en la suivante :

$$\frac{dU}{dz} - R\frac{\frac{dU}{dx}}{P} - \frac{dC}{dz} = 0,$$

et il faut toujours que la substitution de x en fasse disparaître y.

Soit ν le facteur qui rend $Pdx + Qdy$ différentielle exacte, on a

$$\nu P dx + \nu Q dy = dU,$$

et

$$\nu P = \frac{dU}{dx}, \quad \nu Q = \frac{dU}{dy}.$$

La quantité qui ne doit plus renfermer y est

$$\frac{dU}{dz} - R\frac{\frac{dU}{dx}}{P}, \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dz} - \nu R,$$

et il suffit d'exprimer que sa dérivée par rapport à y est nulle, en considérant x comme une fonction de y, dont la dérivée partielle par rapport à y est $-\frac{Q}{P}$. On obtient ainsi

$$\frac{d^2U}{dzdy} - \frac{d^2U}{dzdx}\cdot\frac{Q}{P} - \nu\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dR}{dx}\cdot\frac{Q}{P}\right) - R\left(\frac{d\nu}{dy} - \frac{d\nu}{dx}\cdot\frac{Q}{P}\right) = 0.$$

En multipliant par P et observant que $\frac{dU}{dy} = \nu Q$, et $\frac{dU}{dx} = \nu P$, les deux premiers termes deviennent

$$P\frac{d.\nu Q}{dz} - Q\frac{d.\nu P}{dz},$$

ou, en développant,

$$\nu\left(P\frac{dQ}{dz} - Q\frac{dP}{dz}\right);$$

et la dernière partie $R\left(P\frac{d\nu}{dy} - Q\frac{d\nu}{dx}\right)$ se réduit à $R\nu\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$: la condition précédente devient donc, en

supprimant le facteur commun ν,

$$P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0,$$

équation qui ne diffère pas de l'équation (4). Donc cette équation, déjà démontrée nécessaire, est en même temps suffisante pour que la question proposée admette une solution.

On procéderait d'une manière semblable dans le cas où le nombre des variables serait plus grand.

Des équations linéaires d'un ordre quelconque.

40. On appelle ainsi celles dans lesquelles la fonction cherchée et ses dérivées jusqu'à l'ordre m n'entrent qu'au premier degré, et ne se multiplient pas entre elles. Leur forme générale est

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+T\frac{dy}{dx}+Uy=V,$$

A,..., U, V étant des fonctions quelconques de x. Ces équations jouissent d'une propriété remarquable, lorsque le dernier terme V manque. Elle consiste en ce que la somme de plusieurs solutions forme encore une solution de la même équation.

Soit, en effet, l'équation

$$(2)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+T\frac{dy}{dx}+Uy=0.$$

Si y_1, y_2, etc., sont des fonctions qui satisfassent à cette équation, on aura

$$\frac{d^m y_1}{dx^m}+A\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}+\ldots+T\frac{dy_1}{dx}+Uy_1=0,$$

$$\frac{d^m y_2}{dx^m}+A\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}+\ldots+T\frac{dy_2}{dx}+Uy_2=0.$$

Ajoutant ces équations, on aura le même résultat que si l'on substituait $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ à y dans (2). Donc *la somme d'un nombre quelconque de fonctions de x qui satisfont à l'équation* (2) *forme encore une solution de cette équation; et, par conséquent, si l'on connaissait un nombre m d'intégrales particulières renfermant chacune une constante arbitraire, leur somme serait l'intégrale générale.*

On observera d'ailleurs que si une valeur de y est connue, on peut la multiplier par une constante arbitraire, sans qu'elle cesse de satisfaire; de sorte que si les m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ satisfont à l'équation (2), son intégrale générale sera

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ désignant des constantes arbitraires, et en supposant qu'on puisse les déterminer de manière que pour une valeur quelconque de x, les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ soient tout à fait arbitraires.

41. Lorsque l'on aura à intégrer l'équation (1), on commencera par chercher à intégrer l'équation (2) qui est plus facile. Si l'on y peut parvenir complétement, nous allons montrer comment on en peut déduire l'intégrale générale de l'équation (1).

Soit

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

l'intégrale générale de l'équation (2) quand on considère $c_1, c_2, \ldots, c_m$ comme des constantes arbitraires. Il est évident qu'on peut, d'une infinité de manières, substituer à ces constantes des fonctions de x telles que l'on obtienne l'intégrale générale de l'équation (1); et nous allons voir que l'on peut en avoir une détermination qui n'exige que de simples quadratures.

En différentiant l'expression ci-dessus, on obtient

$$dy = c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + \ldots + c_m dy_m + y_1 dc_1 + y_2 dc_2 + \ldots y_m dc_m.$$

Or on peut assujettir $c_1, c_2, \ldots, c_m$ à la condition

$$y_1 dc_1 + y_2 dc_2 + \ldots + y_m dc_m = 0,$$

et il en résulte

$$dy = c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + \ldots + c_m dy_m.$$

On différentiera cette nouvelle équation, et l'on égalera encore à zéro l'ensemble des termes qui contiendront les différentielles $dc_1, dc_2, \ldots, dc_m$; et l'on continuera ainsi jusqu'à $d^{m-1}y$ inclusivement : on aura, de cette manière, $m - 1$ équations entre les différentielles $dc_1, dc_2, \ldots, dc_m$ et des fonctions connues. Substituant ensuite dans l'équation (1) les valeurs de y, $dy, \ldots, d^m y$, on aura une dernière équation qui, jointe aux premières, déterminera complétement les inconnues $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Ces m équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 dc_1 + y_2 dc_2 + \ldots + y_m dc_m &= 0,\\
dy_1 dc_1 + dy_2 dc_2 + \ldots + dy_m dc_m &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d^{m-2}y_1 dc_1 + d^{m-2}y_2 dc_2 + \ldots + d^{m-2}y_m dc_m &= 0,\\
d^{m-1}y_1 dc_1 + d^{m-1}y_2 dc_2 + \ldots + d^{m-1}y_m dc_m &= \mathrm{V} dx^m,
\end{aligned}$$

et il faut bien remarquer que ces équations peuvent avoir lieu en même temps si l'on est parti de l'intégrale générale de l'équation (2). En effet, les coefficients de $dc_1, \ldots, dc_m$ sont précisément ceux que l'on aurait pour $c_1, \ldots, c_m$ dans les expressions de y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, en désignant par y l'intégrale de l'équation (2). Or nous supposons que, pour une valeur quelconque de x, on peut satisfaire aux équations obtenues en égalant ces expres-

sions à des quantités quelconques, et en tirer des valeurs finies $c_1,\ldots, c_m$. Donc aussi le système des équations où $dc_1,\ldots, dc_m$ entrent de la même manière que dans celles-ci, ne renfermera aucune incompatibilité. Il donnera, pour ces inconnues, des valeurs de la forme

$$dc_1 = X_1 dx, \quad dc_2 = X_2 dx, \ldots, \quad dc_m = X_m dx,$$

d'où

$$c_1 = \int X_1 dx + \alpha, \quad c_2 = \int X_2 dx + \alpha_2, \ldots, \quad c_m = \int X_m dx + \alpha_m,$$

et

$$(3)\ y = y_1(\alpha_1 + \int X_1 dx) + y_2(\alpha_2 + \int X_2 dx) + \ldots + y_m(\alpha_m + \int X_m dx).$$

C'est l'intégrale générale, puisqu'elle renferme m constantes arbitraires.

42. Si l'on ne connaissait pas m intégrales particulières de l'équation (2), la question ne serait pas ramenée immédiatement aux quadratures.

Supposons, par exemple, que l'on en connaisse $m-1$ intégrales particulières, on ne pourra plus établir que $m-2$ conditions entre les $m-1$ quantités $c_1, c_2,\ldots, c_{m-1}$. Alors l'expression de $d^{m-1}y$ renfermera $dc_1,\ldots, dc_{m-1}$; et $d^m y$ renfermera $d^2c_1,\ldots, d^2c_m$. La substitution dans l'équation (1) fera toujours disparaître $c_1, c_2,\ldots, c_{m-1}$, mais leurs différentielles premières et secondes y entreront; et comme les $m-2$ équations établies entre $dc_1, dc_2,\ldots, dc_{m-1}$ déterminent ces différentielles en fonction de dc_1, on aura une équation linéaire du second ordre qui renfermera dc_1, d^2c_1, mais non c_1. On la ramènera au premier ordre, sans qu'elle cesse d'être linéaire, en posant $\frac{dc_1}{dx} = z$. Elle pourra toujours s'intégrer complétement, et il s'introduira ainsi deux constantes arbitraires. De simples quadratures feront ensuite connaître les $m-2$ autres quantités $c_2, c_3,\ldots, c_{m-1}$, et il s'introduira ainsi $m-2$

nouvelles constantes arbitraires, de sorte que la valeur de y

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{m-1} y_{m-1}$$

renfermera m constantes arbitraires et sera, par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1).

43. Si l'on n'avait connu que $m - 2$ intégrales de l'équation (2), on n'aurait pu établir que $m - 3$ relations entre $c_1, c_2, \ldots, c_{m-2}$, et l'équation (1), après la substitution, aurait renfermé des différentielles troisièmes. L'élimination de $c_2, \ldots, c_{m-2}$ aurait donné une équation linéaire du troisième ordre renfermant dc_1, d^2c_1, d^3c_1, mais non c_1. On pourrait donc encore l'abaisser au second ordre, sans qu'elle cessât d'être linéaire; et si l'on pouvait l'intégrer complétement, on en déduirait, comme dans le cas précédent, l'intégrale générale de l'équation (1). En appliquant les mêmes raisonnements, on verrait que si l'on connaît $m - n$ intégrales particulières de l'équation (2), l'intégration complète de l'équation (1), et, à plus forte raison, de l'équation (2) est ramenée à celle d'une équation linéaire de l'ordre n, et à de simples quadratures.

44. Il est facile de démontrer que l'intégrale générale de l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + \mathrm{A}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + \mathrm{T}\frac{dy}{dx} + \mathrm{U}y = 0$$

est nécessairement de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m.$$

En effet, soit y_1 une solution de cette équation; supposons qu'elle ne renferme aucune constante arbitraire, ce qu'on peut toujours faire, puisque, s'il en existait, il n'y aurait qu'à leur attribuer des valeurs particulières. L'équation (a) admettra pour solution

$$y = cy_1;$$

c désignant une constante arbitraire. Considérant maintenant c comme une fonction de x, on aura

$$dy = y_1 dc + c dy_1,$$
$$d^2y = y_1 d^2c + 2dy_1 dc + c d^2y_1,$$
$$d^m y = y_1 d^m c + m dy_1 d^{m-1}c + \ldots + c d^m y_1.$$

En substituant dans l'équation (a), les termes multipliés par c disparaissent, et l'on a une équation linéaire de la forme

$$\frac{d^m c}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1}c}{dx^{m-1}} + \ldots + T_1 \frac{dc}{dx} = 0,$$

et, en posant $\frac{dc}{dx} = u$,

$$(b) \qquad \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + A_1 \frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \ldots + T_1 u = 0.$$

Soit u_1 une solution de cette équation, sans constante arbitraire, $c'u_1$ en sera encore une, et l'on aura

$$c = c'\int u_1 dx + c'', \quad \text{d'où} \quad y = c''y_1 + c'y_1\int u_1 dx.$$

On a donc une solution de l'équation (a), de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

y_2 étant une fonction de x différente de y_1.

Donc, puisque cela peut s'appliquer à toute équation linéaire, on aura une solution de l'équation (b) de la forme

$$u = \alpha u_1 + 6 u_2,$$

d'où

$$c = \alpha\int u_1 dx + 6\int u_2 dx + \gamma,$$

et, par suite,

$$y = \alpha y_1 \int u_1 dx + 6 y_1 \int u_2 dx + \gamma y_1,$$

c'est-à-dire que l'équation (a) a une intégrale de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3.$$

Il en sera donc de même de l'équation (b), et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait pour y une expression renfermant m constantes arbitraires, et qui sera l'intégrale générale.

45. Le calcul précédent conduit encore à cette importante proposition, que l'équation (a) ne saurait avoir de solution singulière. Supposons, en effet, qu'il y en ait une, et désignons-la par y_1, après qu'on aura remplacé par des valeurs particulières quelconques les constantes arbitraires, si elle en renferme. Les raisonnements qui ont été faits dans le numéro précédent conduiront encore à une valeur de y de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

qui sera nécessairement l'intégrale générale. Mais y_1 s'obtient en supposant nulles toutes les constantes excepté c_1 : elle est donc une intégrale particulière, quelques valeurs qu'on y ait mises pour les constantes, et non une solution singulière, comme on l'avait supposé. D'où il suit que les équations renfermées dans la formule (a) ne peuvent jamais avoir de solutions singulières.

46. *Cas où l'on connaît une intégrale particulière de l'équation* (1). — Lorsque l'on connaît une intégrale particulière de l'équation (1), on peut ramener la recherche de son intégrale générale à celle de l'intégrale générale de l'équation (2).

Soit, en effet, u cette intégrale particulière; on posera $y = u + z$ dans l'équation (1), et, en supprimant les termes qui se détruisent d'après l'hypothèse, il restera

$$\frac{d^m z}{dx^m} + A \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + T \frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

et l'on est ramené, par conséquent, à la recherche de l'intégrale générale de l'équation (2).

Soit pour premier exemple

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + px + q,$$

A,..., U, a,..., q étant constants.

On posera

$$y = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \ldots + \lambda x + \mu.$$

On identifiera les deux membres après la substitution dans l'équation proposée, et il en résultera $n+1$ équations qui détermineront les $n+1$ inconnues α, β,..., μ. On rentrera donc dans le cas où le second membre serait nul.

Soit pour second exemple

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = a\cos(nx+p) + b\sin(nx+p),$$

on posera

$$y = \alpha\cos(nx+p) + \beta\sin(nx+r).$$

En substituant dans la proposée, le premier membre ne se composera que de termes dont les uns renfermeront $\cos(nx+p)$, les autres $\sin(nx+p)$ multipliés par des constantes. En égalant les coefficients de ces deux expressions dans les deux membres, on aura deux équations qui détermineront α, β.

Connaissant ainsi une intégrale particulière, on est ramené au cas où le second membre serait nul. On agirait d'une manière analogue si le second membre renfermait, en outre, des termes semblables dans lesquels les coefficients n et p seraient changés.

47. *Autre méthode pour l'intégration de l'équation linéaire complète.* — M. Cauchy a donné une méthode pour trouver une intégrale particulière de l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = F(x),$$

quand on connaît une intégrale de la suivante,

$$(2)\qquad \frac{d^m z}{dx^m}+A\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\ldots+Uz=0,$$

telle que pour $x=\alpha$, on ait

$$z=0,\quad \frac{dz}{dx}=0,\qquad \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}=0,\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}=F(\alpha),$$

quelle que soit la constante α, et l'on conçoit qu'on pourra toujours trouver une valeur de z satisfaisant à ces conditions, si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation (2), qui renferme m constantes arbitraires.

Soit, en effet, $z=f(x, \alpha)$ cette valeur de z. Posons

$$y=\int_0^x f(x,\alpha)\,d\alpha=\int_0^x z\,d\alpha\,;$$

nous en déduirons

$$\frac{dy}{dx}=f(x,x)+\int_0^x \frac{df(x,\alpha)}{dx}\,d\alpha.$$

Mais, par hypothèse, $f(\alpha,\alpha)$ est nul, quel que soit α; donc $f(x,x)=0$, et l'on a seulement

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \frac{dz}{dx}\,d\alpha.$$

On trouvera de même

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^x \frac{d^2z}{dx^2}\,d\alpha,\ldots,$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}=\int_0^x \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\,d\alpha,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m}=F(x)+\int_0^x \frac{d^m z}{dx^m}\,d\alpha.$$

Substituant à y et à ses dérivées les valeurs ainsi obte-

nues dans l'équation (1), elle devient

$$\int_0^x \left(\frac{d^m z}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \ldots + Uz\right) d\alpha + F(x) = F(x),$$

ce qui est une identité en vertu de l'équation (2).

Connaissant ainsi une solution de l'équation (1), on aura son intégrale générale, en y ajoutant l'intégrale générale de l'équation (2).

Formule relative aux intégrales d'ordres supérieurs.

48. Si dans l'équation (1) tous les coefficients sont nuls, excepté le dernier, on a une équation de la forme

$$(2) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = V,$$

V étant une fonction quelconque de x. En intégrant m fois de suite par rapport à x, on aurait la valeur suivante de y:

$$y = \int^m V dx^m = \int dx \int dx \ldots \int V dx + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m.$$

Mais, au lieu de quadratures successives, on peut, au moyen d'une formule que nous allons faire connaître, exprimer y par une suite de quadratures simples, indépendamment les unes des autres.

On aura d'abord, en intégrant par parties, et en omettant les constantes,

$$\int^2 V dx^2 = \int dx \int V dx = x\int V dx - \int V x dx,$$

$$\int^3 V dx^2 = \frac{1}{1.2}\left(x^2 \int V dx - 2x\int V x dx + \int V x^2 dx\right).$$

En continuant d'intégrer successivement, et opérant les réductions, on reconnaîtrait que les coefficients numériques suivent la même loi que ceux du développement

de $(a - b)^n$, et que l'on a

$$\int^n \mathrm{V}dx^n$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}\int \mathrm{V}dx - \frac{(n-1)}{1} x^{n-2}\int \mathrm{V}xdx + \ldots \\ \pm\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2\ldots p} x^{n-p-1}\int \mathrm{V}x^p dx \mp \ldots \\ \pm\int \mathrm{V}x^{n-1}dx \end{array}\right\}.$$

Mais pour démontrer rigoureusement cette formule, supposons qu'elle soit vraie pour une certaine valeur n, et prouvons qu'elle sera encore vraie pour $n + 1$.

Or, en partant de la dernière formule, supposée exacte, on trouve, en intégrant par parties,

$$\int^{n+1} \mathrm{V}dx^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l} x^n\int \mathrm{V}dx - \frac{n}{1} x^{n-1}\int \mathrm{V}xdx \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}\int \mathrm{V}x^2dx - \ldots \\ \pm\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} x^{n-p}\int \mathrm{V}x^{p+1}dx \mp \ldots \\ \pm nx\int \mathrm{V}x^{n-1}dx \end{array}\right\},$$

$$- \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \\ \mp\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} \pm \ldots \pm n \end{array}\right\}\int \mathrm{V}x^n dx.$$

Or on a

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \ldots \pm n \mp 1 = 0;$$

donc

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \ldots \pm n = \pm 1,$$

et la formule précédente devient

$$\int^{n+1} V dx^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l} x^n \int V dx - \frac{n}{1} x^{n-1} \int V x dx + \ldots \\ \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} x^{n-p} \int V x^{p+1} dx \mp \ldots \\ \mp \int V x^n dx \end{array}\right\}.$$

La loi en question est donc vraie pour l'indice $n+1$, si elle l'est pour l'indice n; et comme elle a été reconnue pour $n=2$, elle est démontrée pour toutes les valeurs entières de n.

Ainsi la valeur générale de y, qui satisfait à l'équation (2), sera, en rétablissant les constantes,

$$y = \frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{m-1} \int V dx - \frac{m-1}{1} \int V x dx + \ldots \\ \pm \frac{(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p} x^{m-p-1} \int V x^p dx \mp \ldots \\ \pm \int V x^{m-1} dx \end{array}\right\}$$
$$+ c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \ldots + c_m.$$

Équations linéaires à coefficients constants.

49. La forme la plus générale de ces équations est la suivante :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V.$$

Si l'on suppose d'abord que le dernier terme V soit constant, on le fera disparaître en changeant y en $y + \frac{V}{U}$; de sorte que l'équation qu'il suffit de considérer est

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0,$$

et si l'on peut en trouver m intégrales particulières, on formera l'intégrale générale en les multipliant chacune par une constante arbitraire, et les ajoutant. Posons $y = e^{ax}$, a étant indéterminé, et substituons dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad a^m + Aa^{m-1} + \ldots + Ta + U = 0.$$

On aura donc m intégrales particulières en prenant successivement pour a les m racines de cette équation. Si on les désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_m$, et par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ des constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$(3) \qquad y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \ldots + c_m e^{a_m x}.$$

50. Il est facile de démontrer que cette équation donne bien l'intégrale générale de l'équation (1). Il suffit, pour cela, de faire voir que pour une valeur particulière $x = \alpha$, on peut déterminer les constantes de manière que $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, soient égaux à des quantités arbitraires. On remarquera d'abord que ces constantes étant entièrement indéterminées, on peut mettre y sous la forme

$$(4) \qquad y = c_1 e^{a_1(x-\alpha)} + c_2 e^{a_2(x-\alpha)} + \ldots + c_m e^{a_m(x-\alpha)},$$

et l'on aura, pour déterminer $c_1, c_2, \ldots, c_m$, les équations suivantes dans lesquelles $y_0, y'_0, \ldots$ sont les valeurs de y et de ses $m-1$, premières dérivées, pour $x = \alpha$:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + \ldots + c_m = y_0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m = y'_0, \\ a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \ldots + a_m^2 c_m = y''_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{m-1} c_1 + a_2^{m-1} c_2 + \ldots + a_m^{m-1} c_m = y_0^{(m-1)}. \end{array} \right.$$

Des équations du premier degré de ce genre conduisent à

des formules dont il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici la démonstration.

Multiplions la première équation par une indéterminée k, la seconde par k', etc., et la dernière par 1, puis ajoutons-les, nous aurons

$$(k + k'a_1 + k''a_1^2 + \ldots + a_1^{m-1})c_1 + (k + k'a_2 + k''a_2^2 + \ldots)c_2 + \ldots$$
$$= ky_0 + k'y'_0 + k''y''_0 + \ldots + y_0^{(m-1)};$$

pour déterminer c_1, nous égalerons à zéro les coefficients de $c_2, \ldots, c_m$, ce qui donnera, pour déterminer $k, k', \ldots, k^{(m-2)}$, les équations en même nombre

$$\left\{\begin{array}{l} k + k'a_2 + k''a_2^2 + \ldots + a_2^{m-1} = 0, \\ k + k'a_3 + k''a_3^2 + \ldots + a_3^{m-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k + k'a_m + k''a_m^2 + \ldots + a_m^{m-1} = 0. \end{array}\right.$$

Les premiers membres de ces équations ne sont autre chose que les valeurs que prend le polynôme $k + k'a + k''a^2 + \ldots + a^{m-1}$ que nous désignerons par $\varphi(a)$ dans lequel on remplace successivement a par toutes les racines de l'équation (2), excepté a_1 : le polynôme $\varphi(a)$ aura donc pour racines $a_2, a_3, \ldots, a_m$, et il en résultera

$$\varphi(a) = (a - a_2)(a - a_3)\ldots(a - a_m) = \frac{F(a)}{a - a_1},$$

en représentant par $F(a)$ le premier membre de l'équation (2). De cette équation l'on déduit

$$\varphi(a_1) = F'(a_1),$$

et l'on aurait de même

$$\varphi(a_2) = F'(a_2),$$

et ainsi de suite ; de sorte que si l'équation (2) n'a pas de racines égales, les dénominateurs des inconnues $c_1, c_2, \ldots,$

qui sont $F'(a_1)$, $F'(a_2)$, seront différents de zéro, et par conséquent on pourra satisfaire aux équations (5); ce qu'il fallait démontrer. Les équations (4) ou (3) représentent donc bien l'intégrale générale. Achevons maintenant ce qui se rapporte à la détermination de ces inconnues, par exemple de c_1; sa valeur est

$$c_1 = \frac{ky_0 + k'y'_0 + \ldots + y_0^{(m-1)}}{F'(a_1)}.$$

Il ne reste donc qu'à connaître les valeurs de k, k',...; or elles résulteront de l'identité

$$k + k'a + k''a^2 + \ldots + a^{m-1} = \frac{F(a)}{a - a_1}.$$

Il suffira de développer le quotient fini de $F(a)$ par $a - a_1$, et les coefficients des différentes puissances de a seront k, k',.... Les formules que l'on obtiendra ainsi conviendront pour a_2, a_3,... par la simple substitution de ces racines respectives à a_1.

51. Nous nous bornerons, sur ce point, à l'examen du cas général où les racines sont différentes, et nous ne traiterons pas le cas particulier où il y en aurait d'égales.

Si l'équation (2) a des racines imaginaires, la valeur (3) de y se présentera sous forme imaginaire; mais rien n'est plus facile que de lui donner une forme réelle. Soient $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (2), les termes qui en proviendront dans la formule (3) seront de la forme

$$Ae^{(\alpha + 6\sqrt{-1})x} + Be^{(\alpha - 6\sqrt{-1})x},$$

ou

$$e^{\alpha x}\left(Ae^{6x\sqrt{-1}} + Be^{-6x\sqrt{-1}}\right),$$

ou encore

$$c^{\alpha x}\left[A\left(\cos 6x + \sqrt{-1}\sin 6x\right) + B\left(\cos 6x - \sqrt{-1}\sin 6x\right)\right].$$

Or, A et B étant des quantités arbitraires, réelles ou imaginaires, on peut les déterminer de manière qu'on ait

$$A + B = M, \quad (A - B)\sqrt{-1} = N,$$

M et N étant des constantes arbitraires. Les deux termes que nous considérons dans l'équation (3) seront donc remplacés par

$$e^{\alpha x}(M\cos 6x + N\sin 6x),$$

et la valeur de y se présentera sous une forme réelle.

52. Si l'équation (2) avait des racines égales, les termes correspondants de la formule (3) se confondraient en un seul, et l'on n'aurait plus l'intégrale générale de l'équation (1), puisqu'il n'y aurait plus m constantes arbitraires. Mais il est encore facile de trouver dans ce cas l'intégrale générale.

Soient a_1 et a_2 deux racines que l'on suppose égales. On peut altérer infiniment peu les coefficients de l'équation (1), de telle sorte que l'équation (2) n'ait plus de racines égales, et que, par conséquent, la formule (3) donne l'intégrale générale. Lorsque les coefficients tendront vers ceux de l'équation (1), cette intégrale tendra vers une limite qui satisfera nécessairement à l'équation proposée, et qui en sera l'intégrale générale, si elle renferme m constantes arbitraires.

Soit $a_1 + \delta$ la valeur de la racine qui tend à se réduire à a_1. Les termes correspondants de la valeur de y seront $ce^{a_1 x} + c'e^{a_1 x + \delta x}$, ou

$$ce^{a_1 x} + c'e^{a_1 x}\left(1 + \delta x + \frac{\delta^2 x^2}{1.2} + \ldots\right),$$

ou, en posant $c + c' = A$, $c'\delta = B$,

$$Ae^{a_1 x} + Bxe^{a_1 x} + \frac{\delta B}{1.2}x^2 e^{a_1 x} + \ldots;$$

les constantes c et c' étant arbitraires peuvent toujours être choisies de manière que B et A aient des valeurs finies quelconques, quelque petit que soit δ. Donc, à mesure que δ tend vers zéro, la somme des termes que nous considérons tend vers la limite $Ae^{a_1x} + Bxe^{a_1x}$, et la formule (3) se change en celle-ci

$$(6) \qquad y = e^{a_1x}(A + Bx) + c_3e^{a_3x} + \ldots + c_me^{a_mx}.$$

Cette valeur de y est l'intégrale générale, puisqu'elle renferme m constantes arbitraires.

53. Si trois racines étaient égales, on supposerait d'abord l'équation modifiée de manière que deux racines seulement fussent égales, ce qui conduirait à la formule (6); on remplacerait a_3 par $a_1 + \delta$, et l'on aurait

$$y = e^{a_1x}\left[(A+c_3) + (B+c_3\delta)x + c_3\delta^2\frac{x^2}{1.2} + c_3\frac{\delta^3x^3}{1.2.3} + \ldots\right] + \ldots.$$

Or, A, B, c_3 étant arbitraires, on peut poser

$$\frac{c_3\delta^2}{1.2} = C', \quad B + c_3\delta = B', \quad A + c_3 = A',$$

A', B', C' étant de nouvelles constantes arbitraires; et, faisant tendre δ vers zéro, on aura pour l'intégrale générale

$$y = e^{a_1x}(A' + B'x + C'x^2) + c_4e^{a_4x} + \ldots + c_me^{a_mx}.$$

On continuerait de la même manière si l'on supposait une quatrième racine égale à a_1, et l'on voit qu'en général, si n racines deviennent égales à a_1, on aura pour l'intégrale générale

$$(7) \qquad \begin{aligned} y = {} & e^{a_1x}(A' + B'x + C'x^2 + \ldots + P'x^{n-1}) \\ & + c_{n+1}e^{a_{n+1}x} + \ldots + c_me^{a_mx}. \end{aligned}$$

54. On peut encore déterminer d'une autre manière

l'intégrale générale, lorsque n racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ont une même valeur a. En effet, on ne connaît plus alors immédiatement que $m - n + 1$ intégrales particulières, et ce cas rentre, par conséquent, dans celui qui a été traité dans un des numéros précédents.

Soit Ce^{ax} le terme auquel se réduisent n termes de l'équation (3), et généralisons-le en considérant C comme fonction de x; nous aurons

$$\frac{d^m y}{dx^m} = Ca^m e^{ax} + ma^{m-1}\frac{dC}{dx}e^{ax} + \ldots + \frac{d^m C}{dx^m}e^{ax},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = Cae^{ax} + \frac{dC}{dx}e^{ax},$$

$$y = Ce^{ax}.$$

Substituant dans l'équation (1), les termes qui renferment C disparaissent en vertu de l'équation (2); ceux qui renferment $\frac{dC}{dx}$ disparaissent, ainsi que les suivants, jusqu'à ceux où entrent $\frac{d^{n-1}C}{dx^{n-1}}$ inclusivement, parce que la racine a annule les $n - 1$ premières dérivées de l'équation (2). Il reste donc une équation en C dans laquelle l'ordre le plus élevé est m, et le moins élevé est n. Son intégrale générale fournirait m constantes arbitraires, mais nous n'avons besoin que d'une valeur de C qui en renferme n, et c'est ce que nous aurons en posant

$$\frac{d^n C}{dx^n} = 0, \quad \text{d'où} \quad C = A' + B'x + \ldots + P'x^{n-1};$$

ce qui conduit de nouveau à la formule (7).

55. Si le dernier terme V était fonction de x, on pourrait commencer par le négliger, et l'on intégrerait l'équation (1) comme nous venons de le faire; puis on considérerait les constantes comme des fonctions de x, et l'on

obtiendrait la solution complète de l'équation proposée par le procédé indiqué précédemment. Nous ferons observer seulement que si quelques-unes des racines $a_1,\ldots,a_m$ étaient imaginaires ou égales, il serait convenable d'employer l'intégrale de l'équation (1) avec les modifications que nous avons indiquées dans ce cas.

Cette équation peut aussi s'intégrer par la méthode de M. Cauchy, et nous la choisirons pour donner un exemple de cette méthode. Soit

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = F(x).$$

En négligeant le second membre, l'intégrale générale sera de la forme

$$y = c_1 e^{a_1(x-\alpha)} + c_2 e^{a_2(x-\alpha)} + \ldots + c_m e^{a_m(x-\alpha)},$$

α étant une constante choisie arbitrairement, et $a_1, a_2,\ldots, a_m$ les racines, que nous supposerons toutes inégales, de l'équation

$$a^m + Aa^{m-1} + \ldots + Ta + U = 0.$$

Il faut d'abord déterminer les constantes $c_1, c_2,\ldots, c_m$ par la condition que pour $x = \alpha$ on ait

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \ \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = F(\alpha);$$

on est conduit ainsi aux m équations suivantes :

$$\begin{gathered}c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 0,\\ a_1c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m = 0,\\ a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \ldots + a_m^2 c_m = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_1^{m-1} c_1 + a_2^{m-1} c_2 + \ldots + a_m^{m-1} c_m = F(\alpha).\end{gathered}$$

Les équations se résoudront comme on l'a vu précédem-

ment, et, en posant

$$a^m + Aa^{m-1} + \ldots + Ta + U = f(a),$$

on trouvera

$$c_1 = \frac{F(\alpha)}{f'(a_1)}, \quad c_2 = \frac{F(\alpha)}{f'(a_2)}, \ldots, \quad c_m = \frac{F(\alpha)}{f'(a_m)}.$$

La valeur précédente de y devient ainsi

$$\frac{e^{a_1 x}}{f'(a_1)} F(\alpha) e^{-a_1\alpha} + \frac{e^{a_2 x}}{f'(a_2)} F(\alpha) e^{-a_2\alpha} + \ldots$$
$$+ \frac{e^{a_m x}}{f'(a_m)} F(\alpha) e^{-a_m\alpha}.$$

Il faut maintenant intégrer cette expression par rapport à α entre les limites o et x, puis y ajouter l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = 0,$$

laquelle est, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des constantes arbitraires,

$$y = \alpha_1 e^{a_1 x} + \alpha_2 e^{a_2 x} + \ldots + \alpha_m e^{a_m x}.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée sera donc

$$y = e^{a_1 x}\left[\alpha_1 + \frac{1}{f'(a_1)}\int_0^x e^{-a_1\alpha} F(\alpha)\, d\alpha\right] + \ldots$$
$$+ e^{a_m x}\left[\alpha_m + \frac{1}{f'(a_m)}\int_0^x e^{-a_m\alpha} F(\alpha)\, d\alpha\right].$$

56. **Les équations linéaires de la forme suivante:**

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{A}{ax+b}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + \frac{N}{(ax+b)^n}\frac{d^{m-n}y}{dx^{m-n}} + \ldots$$
$$+ \frac{Uy}{(ax+b)^m} = 0$$

s'intègrent généralement en posant $y=(ax+b)^\alpha$. On trouve, en substituant,

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)a^m+A\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)a^{m-1}+\ldots+U=0.$$

Cette équation donne pour α, m valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; et si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ des constantes arbitraires, l'intégrale générale sera

$$y=c_1(ax+b)^{\alpha_1}+c_2(ax+b)^{\alpha_2}+\ldots+c_m(ax+b)^{\alpha_m}.$$

Le cas où l'équation en α aurait des racines imaginaires ou égales se traiterait comme dans les questions précédentes.

57. Lorsque l'on connaît l'intégrale générale d'une équation quelconque de l'ordre m

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right)=0,$$

ou, en posant $\frac{dy}{dx}=y', \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}=y^{(m)}$,

$$(1) \qquad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)})=0,$$

on peut former une équation linéaire de l'ordre m, à coefficients variables, dont l'intégrale générale sera exprimable immédiatement.

Soit, en effet,

$$(2) \qquad y=\varphi(x, a, b, \ldots, l),$$

l'intégrale de l'équation (1) renfermant m constantes $a, b, \ldots, l$. Si l'on substitue cette valeur et celles que prennent par suite y', y'', etc., l'équation (1) deviendra identique, quels que soient $x, a, b, \ldots, l$. Si donc on la différentie, après cela, par rapport à l'une des constantes, a par exemple, le résultat sera encore une identité en

$x, a, b, \ldots, l$. On trouvera ainsi

$$(3)\quad \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\frac{dy'}{da}+\frac{d\mathrm{F}}{dy''}\frac{dy''}{da}+\ldots+\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(m)}}\frac{dy^{(m)}}{da}=0,$$

et cette équation sera identique en x, a, $b, \ldots, l$, si l'on remet, au lieu de y et de ses dérivées, les valeurs données par l'équation (2).

Posons maintenant $\frac{dy}{da}=u$, il s'ensuivra

$$\frac{dy'}{da}=\frac{du}{dx},\quad \frac{dy''}{da}=\frac{d^2u}{dx^2},\ldots,\quad \frac{dy^{(m)}}{da}=\frac{d^mu}{dx^m},$$

puisque x et a sont indépendants.

L'équation (3) devient alors

$$(4)\qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy}u+\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\frac{du}{dx}+\ldots+\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(m)}}\frac{d^mu}{dx^m}=0.$$

Si maintenant on exprime tous les coefficients $\frac{d\mathrm{F}}{dy}, \ldots, \frac{d\mathrm{F}}{dy^{(m)}}$ au moyen de x, a, $b, \ldots, l$ d'après l'équation (2), on aura une équation linéaire de l'ordre m à coefficients variables dont on connaîtra une intégrale qui ne sera autre chose que $\frac{d\varphi(x, a, b, \ldots, l)}{da}$. Si l'on avait différentié l'équation (1) par rapport à l'une quelconque des autres constantes $b, \ldots, l$, on serait arrivé à la même équation (4), dans laquelle u aurait représenté la dérivée partielle de $\varphi(x, a, b, \ldots, l)$ par rapport à ces diverses constantes. On formera donc, de cette manière, m intégrales particulières de l'équation (4), et, en les multipliant par des constantes arbitraires A, B,..., L, leur somme donnera l'intégrale générale de cette équation ; son expression sera

$$u=\mathrm{A}\frac{d\varphi}{da}+\mathrm{B}\frac{d\varphi}{db}+\ldots+\mathrm{L}\frac{d\varphi}{dl}.$$

Si l'on ne connaissait qu'une intégrale particulière de l'équation (1) renfermant moins de m constantes, on en déduirait une intégrale particulière pour l'équation (4) avec un même nombre de constantes.

On remarquera que si l'équation (1) était linéaire, l'équation (4) aurait les mêmes coefficients, et même ne renfermerait pas de terme indépendant de la fonction u; elle rentrerait donc dans la première, et l'on ne parviendrait à rien de nouveau.

Transformations propres à abaisser l'ordre des équations.

58. Toute équation linéaire de l'ordre m

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + Py = 0$$

peut s'abaisser à l'ordre $m - 1$, en posant

$$y = e^{\int t dx}.$$

En effet, on aura

$$\frac{dy}{dx} = te^{\int t dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = t^2 e^{\int t dx} + \frac{dt}{dx} e^{\int t dx}, \ldots;$$

substituant dans la proposée, le facteur $e^{\int t dx}$ disparaîtra, et l'équation sera de l'ordre $m - 1$ en t; mais elle ne sera plus linéaire.

Soit, par exemple,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0,$$

on obtiendra

$$\frac{dt}{dx} + t^2 + At + B = 0.$$

59. Considérons maintenant une équation où n'entrent

ni x ni y, mais seulement deux dérivées consécutives d'ordre quelconque :

$$F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

On posera $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$, et il viendra $F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$; d'où l'on tirera

$$dx = f(p)\,dp \quad \text{et} \quad x = \int f(p)\,dp + C = \varphi(p).$$

Si l'on peut résoudre cette équation par rapport à p, on connaîtra $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ en fonction de x, et par une suite de quadratures on parviendra à avoir y en fonction de x et de n constantes arbitraires. Si l'on ne peut la résoudre, on obtiendra y en fonction de p de la manière suivante.

L'équation $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$ donne

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int p\,dx = \int p f(p)\,dp + C';$$

intégrant toujours par rapport à x, et remplaçant dx par $f(p)\,dp$ dans le second membre, on parviendra, par une suite de quadratures, à $y = \psi(p)$.

Éliminant p entre cette équation et $x = \varphi(p)$, on aura une équation entre y, x et n constantes arbitraires, qui sera l'intégrale générale de la proposée.

60. Si par exemple on demandait la courbe dont le rayon de courbure est égal à une constante a, il faudrait intégrer l'équation

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a;$$

ou, en posant $\frac{dy}{dx} = p$,

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a,$$

d'où

$$dx = \frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{et} \quad x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + C.$$

On pourrait résoudre cette équation par rapport à p, mais il sera plus simple d'exprimer y en fonction de p; on aura

$$y = \int pdx = a\int \frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C_1.$$

Connaissant ainsi deux intégrales premières de la proposée, il suffira d'éliminer p entre elles pour obtenir l'intégrale générale, qui sera

$$(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = a^2,$$

équation d'un cercle ayant a pour rayon, et le centre au point arbitraire dont les coordonnées sont C, C_1.

61. Considérons encore le cas où les ordres des deux dérivées auraient une différence de deux unités

$$F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0;$$

posant $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, il vient

$$F\left(p, \frac{d^2p}{dx^2}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2p}{dx^2} = f(p);$$

multipliant par $2dp$ et intégrant, il vient

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = 2\int f(p)\,dp + C;$$

d'où

$$dx = \varphi(p)\,dp, \quad x = \psi(p),$$

$\psi(p)$ renfermant deux constantes arbitraires.

Si l'on peut résoudre cette équation par rapport à p, on connaîtra y par $n - 2$ quadratures, qui introduiront $n-2$ nouvelles constantes arbitraires; sinon, on obtiendra y en fonction de p, en intégrant $n - 2$ fois l'équation $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, après avoir multiplié à chaque fois le premier membre par dx, et le second par son égal $\varphi(p)\,dp$. L'expression de y renfermera ainsi $n - 2$ constantes arbitraires, et l'élimination de p entre les deux équations qui donnent x et y conduira à une équation entre x, y et n constantes, qui sera l'intégrale générale de l'équation proposée.

62. En général, si l'on a

$$F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right),$$

on abaissera l'ordre de n unités, en posant $\frac{d^n y}{dx^n} = p$, et si l'on peut intégrer l'équation

$$F\left(x, p, \ldots, \frac{d^{m-n} p}{dx^{m-n}}\right),$$

puis résoudre par rapport à x, ou à p, on obtiendra l'équation en x et y par les mêmes moyens que dans les cas précédents.

Mais si l'équation était de la forme

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

on pourrait, par le changement de la variable indépen-

dante, la réduire à la forme

$$F\left(y, \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{d^m x}{dy^m}\right) = 0,$$

et l'abaisser en posant $\frac{dx}{dy} = p$.

63. Si l'équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

était homogène par rapport aux quantités y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots,$ on pourrait abaisser son ordre d'une unité.

En effet, en divisant par une puissance convenable de y, on lui donnera la forme

$$f\left(x, \frac{\frac{dy}{dx}}{y}, \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{y}, \ldots\right) = 0.$$

On posera ensuite $\frac{dy}{dx} = yt$, ce qui revient à poser $y = e^{\int t dx}$. Il en résultera

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y\left(\frac{dt}{dx} + t^2\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = y\left(\frac{d^2 t}{dx^2} + 3t\frac{dt}{dx} + t^3\right), \ldots.$$

y sera facteur dans toutes ces dérivées, et l'équation ci-dessus deviendra, par ces substitutions, une équation de l'ordre $m - 1$ entre x et t.

64. Lorsqu'on donne l'équation d'une courbe, renfermant l'arc s, et qu'on cherche celle qui aurait lieu entre x et y seulement, il faut différentier l'équation donnée, remplacer ds par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, et éliminer s entre cette équation et la première; on aura ainsi une équation

différentielle entre x et y seulement. Si l'équation donnée peut être résolue par rapport à s, il n'y a aucune élimination à faire après la différentiation.

Soit, par exemple, $s^2 = ay$, d'où l'on tire

$$s = a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Différentiant, il vient

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}:$$

on tire de là

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a}{4y} - 1},$$

équation d'une cycloïde rapportée à son sommet, et engendrée par un cercle dont le rayon est $\frac{a}{8}$.

Si l'on donnait une équation de la forme

$$s = \mathrm{F}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

on poserait

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{d'où} \quad s = \mathrm{F}(p).$$

On obtiendra par la différentiation

$$\frac{ds}{dx} = \mathrm{F}'(p)\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2};$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{\mathrm{F}'(p)\,dp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$dy = pdx = \frac{p\mathrm{F}'(p)\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Si l'on peut effectuer ces deux quadratures, on obtiendra l'équation entre x et y, en éliminant p entre les deux

équations obtenues. Si l'une de ces deux équations peut être résolue par rapport à p, il est inutile de connaître l'autre, puisque l'on aura la valeur $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x ou de y, et que, par conséquent, on aura l'équation finie entre x et y par une simple quadrature. Soit par exemple

$$s = a \operatorname{arc\,tang} \frac{dy}{dx}.$$

La différentiation donne l'équation

$$dx = \frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, par suite,

$$dy = \frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette dernière s'intègre immédiatement, et donne

$$y - c = -a(1+p^2)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$dx = \frac{(y-c)\,dy}{\sqrt{a^2-(y-c)^2}},$$

et, en intégrant,

$$(x-c')^2 + (y-c)^2 = a^2.$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon a, placé d'une manière quelconque. Pour satisfaire à l'équation donnée, il faudra prendre pour origine des arcs l'un des points où la tangente est parallèle à l'axe des x, afin que l'on ait $s = 0$ lorsque $\frac{dy}{dx} = 0$.

Intégration des équations homogènes par rapport à x, y, dx, dy, d^2y.

65. Soit

$$(1) \qquad F(x, y, dx, dy, d^2y) = 0$$

une équation de ce genre, et dont les termes sont tous finis, ou infiniment petits du même ordre.

Posons

$$y = ux, \quad dy = pdx, \quad d^2y = \frac{q}{x}dx^2.$$

En faisant d'abord ces substitutions dans l'équation (1), y et ses différentielles auront disparu, et tous ses termes seront homogènes par rapport à x et dx. En effet, ils l'étaient primitivement par rapport à x, dx, y, dy, d^2y, et l'on a substitué à ces trois dernières quantités des expressions homogènes du premier ordre, par rapport à x et dx. Et comme tous les termes doivent être du même ordre infinitésimal, dx disparaît nécessairement, et par suite x. Donc l'équation obtenue sera de la forme

$$(2) \qquad f(u, p, q) = 0,$$

et donnera

$$q = \varphi(p, u).$$

Or $\frac{dx}{x}$ peut s'exprimer de deux manières au moyen de u et p, car on a

$$udx + xdu = pdx,$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}.$$

D'une autre part, on a

$$\frac{q}{x} = \frac{dp}{dx}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{q} = \frac{dp}{\varphi(p, u)}.$$

Égalant les deux valeurs de $\frac{dx}{x}$, il vient

(3) $$\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\varphi(p, u)},$$

équation différentielle du premier ordre, qui, intégrée, donnera

$$p = \psi(u, c),$$

c désignant une constante arbitraire.

On connaîtra facilement x en fonction de u, puisque l'on aura

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\psi(u, c) - u},$$

d'où, en désignant par c' une nouvelle constante arbitraire, et par $1\chi(u, c)$ l'intégrale du second membre,

$$x = c'\chi(u, c);$$

et comme $u = \frac{y}{x}$, on aura

$$x = c'\chi\left(\frac{y}{x}, c\right),$$

et l'on connaîtra ainsi l'intégrale générale de l'équation proposée.

66. Lorsque le second membre de l'équation (3) est de la forme

$$\frac{udp}{\varphi(p)},$$

on remplace l'équation (3) par la suivante :

$$\frac{dx}{x} = \frac{udp}{\varphi(p)},$$

qui devient, en multipliant par $\frac{p}{u}$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{pdp}{\varphi(p)},$$

d'où l'on tire

$$1y = \int \frac{pdp}{\varphi(p)}.$$

Effectuant l'intégration et désignant par c une constante arbitraire, on mettra y sous la forme

$$y = c\psi(p).$$

Si l'on peut résoudre par rapport à p, on ramènera l'équation à la forme

$$dx = \chi(y)\,dy,$$

et l'on intégrera les deux membres; sinon, l'on tirera des équations précédentes

$$dy = \frac{pydp}{\varphi(p)} = \frac{cp\psi(p)\,dp}{\varphi(p)} = pdx,$$

d'où

$$x = c\int \frac{\psi(p)\,dp}{\varphi(p)},$$

et l'on éliminera p entre cette équation et $y = c\psi(p)$.

67. Nous trouverons une application de cette méthode dans le problème suivant : *Déterminer la courbe dans laquelle le rayon de courbure est proportionnel à la normale.*

On obtient immédiatement l'équation différentielle

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \mp my\frac{d^2y}{dx^2},$$

m étant le rapport du rayon de courbure à la normale. Le signe supérieur se rapporte au cas où le rayon de courbure est dans le sens de la normale, et le signe inférieur, au cas où il est en sens contraire.

Posant

$$y = ux, \quad dy = pdx, \quad d^2y = \frac{q}{x}dx^2,$$

on obtient

$$1+p^2=\mp muq, \quad \text{d'où} \quad q=\frac{1+p^2}{\mp mu},$$

et, par suite,

$$\frac{du}{(p-u)}=\mp\frac{mudp}{1+p^2},$$

équation qui ne rentre pas dans celles que nous avons intégrées. Mais, d'après la remarque faite dans le dernier numéro, on la remplacera par la suivante :

$$\frac{dx}{x}=\mp\frac{mudp}{1+p^2},$$

d'où l'on déduit successivement

$$\frac{dx}{y}=\mp\frac{mdp}{(1+p^2)}, \quad \frac{dy}{y}=\mp\frac{mpdp}{1+p^2},$$

$$1\frac{y}{c}=\mp\frac{m}{2}\,1(1+p^2)=1(1+p^2)^{\mp\frac{m}{2}},$$

$$y=c(1+p^2)^{\mp\frac{m}{2}},$$

$$p=\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp\frac{2}{m}}-1}=\frac{dy}{dx},$$

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp\frac{2}{m}}-1}}.$$

Il y a des valeurs particulières de m qui rendent cette intégration possible, savoir $m=2$, $m=1$. Examinons successivement ces deux cas.

1°. Soit $m = 2$, on aura

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp 1} - 1}}.$$

En prenant le signe supérieur, on a

$$dx = dy\sqrt{\frac{y}{c - y}},$$

équation d'une cycloïde dont la base est située sur l'axe des x, et dont le cercle générateur a pour rayon $\frac{c}{2}$, dont la valeur est arbitraire. Et, en effet, on sait que dans toute cycloïde ainsi placée, le rayon de courbure est double de la normale.

En prenant le signe inférieur, on a

$$dx = \frac{\sqrt{c}dy}{\sqrt{y - c}},$$

d'où

$$x - c' = 2\sqrt{c}(y - c)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$y - c = \frac{(x - c')^2}{4c},$$

équation d'une parabole dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x.

La normale se rapportant à une droite donnée, que l'on a prise pour axe des x, si l'on changeait cet axe, il faudrait se rappeler que la normale doit être prolongée jusqu'à la droite donnée, et non jusqu'au nouvel axe des x. Mais on peut prendre l'origine en tel point que l'on voudra de cette ligne, par exemple celui dont l'ab-

scisse est c', ce qui revient à faire $c' = 0$; on a ainsi

$$y - c = \frac{x^2}{4c},$$

et il est facile de vérifier que, quel que soit c, la parabole représentée par cette équation a son rayon de courbure double de la normale et dirigé en sens contraire.

2°. Soit $m = 1$; l'équation différentielle de la courbe sera

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp 2} - 1}}.$$

En prenant le signe supérieur, il vient

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}};$$

d'où

$$x - c' = -\sqrt{c^2 - y^2},$$

ou

$$y^2 + (x - c')^2 = c^2,$$

équation d'un cercle quelconque ayant son centre sur l'axe des x. Et l'on voit, en effet, qu'alors le rayon de courbure sera toujours égal à la normale, et dirigé dans le même sens. Si l'on prend le signe inférieur, on trouve

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

d'où

$$x - c' = c\,\mathrm{l}\,\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$

Remplaçant $x - c'$ par x, on obtient

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{\frac{x}{c}},$$

qui se réduit à

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

c'est la courbe que l'on nomme *chaînette :* elle est symétrique par rapport à l'axe des y, et son sommet est à la distance c de l'axe des x. Il est facile de vérifier que son rayon de courbure est égal à la normale et dirigé en sens contraire.

Une des équations que nous venons de traiter peut être intégrée plus simplement par une considération particulière: c'est celle que l'on obtient en supposant $m = 1$, et prenant le signe supérieur; on a alors

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = 0;$$

des deux premiers termes formant la dérivée de $y\frac{dy}{dx}$, on aura, en intégrant,

$$y\frac{dy}{dx} + x - c = 0,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$y^2 + (x - c)^2 = c',$$

équation qui ne diffère pas de celle que nous avions déjà trouvée.

Élimination des variables entre les équations différentielles simultanées. Intégration de ces équations.

68. Considérons d'abord deux équations à trois variables x, y, z, et dans lesquelles on peut toujours supposer que les dérivées soient prises par rapport à la même variable indépendante, x par exemple; y et z sont des

fonctions de x qu'il s'agit de déterminer, et nous commencerons par y appliquer le développement en séries.

On peut toujours supposer que l'on tire de ces équations les valeurs des coefficients différentiels de l'ordre le plus élevé par rapport à y et z, s'ils entrent dans les deux équations. Il faut toutefois excepter le cas particulier où l'élimination de l'un ferait disparaître en même temps l'autre. Les deux équations peuvent donc, en général, être conçues sous la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad z, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right),$$
$$\frac{d^n z}{dx^n} = F_1\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad z, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right);$$

si l'on prend arbitrairement les valeurs de $y, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, $z, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, dans lesquelles on fait $x = 0$, elles serviront à exprimer toutes les dérivées suivantes de y et z, pour la valeur $x = 0$, et l'on pourra, par conséquent, développer y et z par la formule de Maclaurin. On voit que leurs expressions renfermeront $m + n$ constantes arbitraires. Au lieu de la valeur particulière $x = 0$, on pourrait en choisir une autre quelconque x_0 et employer la série de Taylor.

Si l'élimination de $\frac{d^m y}{dx^m}$ avait entraîné $\frac{d^n z}{dx^n}$, la seconde des équations précédentes serait d'un ordre inférieur à n. Ce cas est renfermé dans celui que nous allons traiter.

69. Soit m l'ordre le plus élevé par rapport à y dans les deux équations. On tirera la valeur de $\frac{d^m y}{dx^m}$ de l'une des équations, et on la reportera dans l'autre, si cette dérivée s'y trouve; il n'y aura plus alors dans celle-ci que des ordres inférieurs à m par rapport à y. On en tirera la

valeur de la dérivée la plus élevée en z, et l'on aura deux équations de la forme

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \mathrm{F}\left(x,\ y,\ldots,\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\quad z,\ldots,\ \frac{d^n z}{dx^n}\right),$$

$$(2)\qquad \frac{d^{n'} z}{dx^{n'}} = \mathrm{F}_1\left(x;\ y,\ldots,\ \frac{d^{m'}y}{dx^{m'}},\quad z,\ldots,\ \frac{d^{n'-1}z}{dx^{n'-1}}\right);$$

dans lesquelles on a $m > m'$, et $n < n'$ ou $n > n'$.

1°. Soit $n < n'$; prenons arbitrairement les valeurs de $y,\ldots,\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\quad z,\ldots,\ \frac{d^{n'-1}z}{dx^{n'-1}}$ pour $x = 0$; toutes les dérivées supérieures seront connues pour la même valeur $x = 0$, au moyen de celles-ci et des équations (1) et (2), de sorte qu'on pourra effectuer le développement de y et z. Le nombre des constantes arbitraires qui y entreront est $m + n'$, et dans le cas actuel, on a $m + n' > m' + n$.

2°. Soit $n > n'$; le développement de y exige toujours que l'on connaisse les valeurs de $z,\ldots,\ \frac{d^n z}{dx^n}$ pour $x = 0$. Or, depuis l'ordre n', elles devront être tirées de l'équation (2) et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n en z; ce qui conduira à l'ordre $m' + n - n'$ en y. Or, si l'on avait $m' + n - n' > m$, l'équation (1) ferait connaître $\frac{d^m y}{dx^m}$, au moyen des dérivées d'ordres supérieurs à m, et celles-ci au moyen d'autres plus élevées; on ne pourrait donc effectuer le développement de y. On doit donc avoir $m + n' > m' + n$ pour que le calcul précédent puisse faire connaître y et z; et dans ce cas le nombre des constantes est encore le plus grand des deux nombres $m + n'$ et $m' + n$.

70. Si l'on avait eu $m' + n > m + n'$, on aurait au moins l'une des deux inégalités $m' > m$, $n > n'$; soit par exemple $m' > m$. On tirerait des équations données les

valeurs de $\frac{d^{m'}y}{dx^{m'}}$ et $\frac{d^n z}{dx^n}$; on aurait ainsi

$$\frac{d^{m'}y}{dx^{m'}} = f\left(x,\ y,\ldots,\ \frac{d^{m'-1}y}{dx^{m'-1}},\quad z,\ldots,\ \frac{d^{n'}z}{dx^{n'}}\right),$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = f_1\left(x,\ y,\ldots,\ \frac{d^m y}{dx^m},\quad z,\ldots,\ \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right),$$

et les développements seraient possibles, parce que les équations rentrent dans le cas précédent. Le nombre des constantes serait $m'+n$ et serait encore le plus grand des deux nombres $m'+n$ et $m+n'$.

71. Supposons maintenant un nombre quelconque d'équations simultanées, qui doivent déterminer, en fonction de x, les variables y, z, u,.... Nous considérerons seulement le cas où l'on peut les concevoir résolues par rapport aux coefficients différentiels des ordres respectivement les plus élevés par rapport à y, z, u,..., savoir

$$\frac{d^m y}{dx^m},\quad \frac{d^n z}{dx^n},\quad \frac{d^p u}{dx^p},\ldots.$$

Il est clair qu'au moyen des équations données, qu'on différentiera indéfiniment, il sera suffisant et nécessaire de connaître les valeurs que prennent y, z, u,..., et leurs dérivées jusqu'aux ordres $m-1$, $n-1$, $p-1$,..., inclusivement, et dans lesquelles on fera $x=0$, pour pouvoir effectuer le développement de chaque variable par la formule de Maclaurin. Ces constantes sont entièrement arbitraires, et leur nombre est

$$m+n+p+\ldots.$$

72. Laissant de côté maintenant les développements en séries, nous allons chercher à éliminer toutes les fonctions, excepté une, et ramener ainsi la question à l'intégration d'une seule équation différentielle.

Proposons-nous d'abord d'éliminer y entre deux équations dans lesquelles le coefficient différentiel de l'ordre le

plus élevé par rapport à y est $\frac{d^m y}{dx^m}$ et, par rapport à z, $\frac{d^n z}{dx^n}$. Supposons, en premier lieu, que ces deux expressions entrent dans chaque équation, combinées d'une manière quelconque avec les coefficients différentiels des ordres inférieurs, ainsi que y, z et x. Soient ces équations

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0.$$

Si l'on différentie ces deux équations un même nombre de fois quelconque, on introduira autant de nouvelles dérivées de y d'ordre supérieur à m, et un nombre double d'équations; de sorte que, si l'on effectue ainsi m différentiations, on aura $2m + 2$ équations renfermant y et ses $2m$ premières dérivées, et l'on pourra en éliminer toutes ces quantités par les règles ordinaires de l'algèbre. Leur système sera ramené à une équation de l'ordre $m+n$ entre z et x, d'où l'on pourra tirer la valeur de z en fonction de x et de $m+n$ constantes arbitraires, et à $2m+1$ équations dans lesquelles on substituera à z et à ses dérivées leurs valeurs, actuellement connues, et elles ne renfermeront plus que y et ses $2m$ premières dérivées. Éliminant ces dernières, il restera une équation entre y et x et les $m+n$ constantes arbitraires qui se trouvaient dans z.

Ainsi, en général, *les fonctions y et z renfermeront les mêmes constantes arbitraires, en nombre égal à la somme des nombres qui désignent l'ordre le plus élevé des équations par rapport à y et z respectivement.*

On agirait d'une manière analogue et l'on arriverait à des conséquences semblables, pour un nombre quelconque de fonctions, avec un nombre égal d'équations.

73. Mais il peut arriver que les coefficients différentiels de l'ordre le plus élevé n'entrent pas à la fois dans les deux équations.

Supposons que les coefficients différentiels de l'ordre le plus élevé soient, dans la première,

$$\frac{d^m y}{dx^m}, \quad \frac{d^n z}{dz^n},$$

et, dans la seconde,

$$\frac{d^{m'} y}{dx^{m'}}, \quad \frac{d^{n'} z}{dx^{n'}}.$$

On différentiera m' fois la première équation, et m fois la seconde. On aura alors $m + m' + 2$ équations renfermant y et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m + m'$. On pourra donc éliminer toutes ces quantités, et il restera une équation entre z et x, dont l'ordre sera le plus grand des deux nombres $m + n'$, et $m' + n$; et cet ordre est égal au nombre des constantes qui entreront dans la valeur de z. Substituant à z et à ses dérivées leurs valeurs connues, dans les $m + m' + 1$ équations, on en pourra éliminer les $m + m'$ dérivées de y, et il restera une équation entre y, x, et les constantes qui entrent dans z.

74. Considérons, en particulier, le cas de m équations où toutes les dérivées sont du premier ordre, et peuvent en être déduites sans que l'on rencontre aucune incompatibilité ou indétermination; on aura alors

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y, z, \ldots, u),$$

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z, \ldots, u),$$

....

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z, \ldots, u);$$

et, d'après ce qui précède, les constantes arbitraires se-

ront les valeurs de y, $z, \ldots, u$ correspondantes à $x = x_0$. Si l'on différentie la première $m - 1$ fois et qu'on substitue à chaque fois aux dérivées du premier ordre qui s'introduisent, leurs valeurs tirées des équations données, on obtiendra ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y, z, \ldots, u),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{F}_1(x, y, z, \ldots, u),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = \mathrm{F}_{m-1}(x, y, z, \ldots, u);$$

et il n'y a plus qu'à éliminer les variables $z, \ldots, u$ qui sont au nombre de $m - 1$. Il en résultera une équation de l'ordre m en y, qui donnera la valeur de cette variable en fonction de x et de m constantes arbitraires. Substituant cette valeur dans les $m - 1$ équations qui, conjointement avec l'équation finale, remplacent le système donné, on en déduira $z, \ldots, u$ en fonction de x et des mêmes constantes arbitraires.

Remarque. — Si les intégrales de ces équations sont mises sous la forme

$$\psi(x, y, z, \ldots, u) = c, \quad \psi_1(x, y, z, \ldots, u) = c_1, \ldots$$

qu'on les différentie, et qu'on remplace $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}$ par leurs valeurs en $x, y, z, \ldots, u$, les équations qu'on obtiendra entre ces variables seront des identités; car toute équation déduite des intégrales et des données doit être satisfaite par des valeurs arbitraires y_0, $z_0, \ldots, u_0$, correspondantes à un x arbitraire x_0.

On a donc, quels que soient $x, y, z, \ldots, u$,

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\mathrm{F} + \frac{d\psi}{dz}f + \ldots + \frac{d\psi}{du}\varphi = 0,$$

et ainsi des autres.

75. On peut ramener à ce dernier cas celui dans lequel on suppose que l'on puisse exprimer les dérivées

$$\frac{d^m y}{dx^m}, \quad \frac{d^n z}{dx^n}, \quad \frac{d^p u}{dx^p}, \ldots$$

au moyen de celles d'ordre inférieur.

En effet, si l'on pose

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots, \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y^{(m-1)},$$

$$\frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{dz'}{dx} = z'', \ldots, \frac{dz^{(n-2)}}{dx} = z^{(n-1)},$$

$$\frac{du}{dx} = u', \quad \frac{du'}{dx} = u'', \ldots, \frac{du^{(p-2)}}{dx} = u^{(p-1)},$$

les équations proposées donneront les valeurs de

$$\frac{dy^{(m-1)}}{dx}, \quad \frac{dz^{(n-1)}}{dx}, \quad \frac{du^{(p-1)}}{dx}, \ldots$$

en fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}, z, z', \ldots, z^{(n-1)}, u, u', \ldots, u^{(p-1)}$. En les joignant aux équations précédentes, on aura un système composé de $m + n + p + \ldots$ équations du premier ordre que l'on intégrera comme dans le cas précédent.

76. Nous avons supposé précédemment que les équations données du premier ordre pouvaient être résolues par rapport à toutes les dérivées, qui se trouvaient alors exprimées en fonction des variables elles-mêmes; mais il pourrait en arriver autrement sans que les équations fussent incompatibles.

Si l'on conçoit que l'élimination des dérivées se fasse, par exemple, en tirant de l'une des m équations la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et la reportant dans toutes les $(m - 1)$ autres; puis

tirant $\frac{dz}{dx}$ d'une de ces dernières, et la reportant dans les $m-2$ autres, et ainsi de suite, on parviendra, en général, à exprimer la dernière dérivée au moyen de $x, y, z,\ldots$ et, par suite, toutes les autres. Mais si l'une de ces substitutions faisait disparaître, dans toutes les équations où on la fait, n dérivées en outre de celles que l'on substitue, on aurait un système d'équations dont le nombre surpasserait de n celui des dérivées et l'élimination de celles-ci, en supposant qu'il ne se rencontre pas de nouvelles variables, conduirait à n équations entre les variables même $x, y, z,\ldots$ sans constantes arbitraires. On pourrait en tirer les valeurs des x variables dont les dérivées ont disparu, et il resterait $m-n$ équations différentielles résolues par rapport aux dérivées. Les intégrales du système proposé ne renfermeraient alors que $m-n$ constantes arbitraires.

Soient pour exemple les trois équations

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} = x,$$

$$x\frac{dy}{dx} - x\frac{dz}{dx} + y\frac{du}{dx} = z,$$

$$z\frac{dy}{dx} - z\frac{dz}{dx} - x\frac{du}{dx} = y.$$

L'élimination de $\frac{dy}{dx}$ conduit aux deux équations

$$(y-x)\frac{du}{dx} = z - x^2,$$

$$(z+x)\frac{du}{dx} = xz - y.$$

$\frac{dz}{dx}$ a disparu en même temps que $\frac{dy}{dx}$, et si l'on élimine $\frac{du}{dx}$ entre ces deux équations, il en résultera une autre entre

7.

x, y, z, qui sera

$$\frac{z - x^2}{y - x} = \frac{xz - y}{x + z},$$

ou

$$y^2 + z^2 - xyz + xz - xy - x^3 = 0.$$

On en pourra tirer z en x et y, et l'on connaîtra $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x et y. On rentre ainsi dans le cas primitivement traité, et l'on obtiendra les valeurs de u et y, et, par suite, de z, en fonction de x et de deux constantes arbitraires.

Équations linéaires simultanées.

77. Si ces équations sont toutes du premier ordre, on a un cas particulier de la dernière question; c'est celui où les fonctions F, $f, \ldots, \varphi$ sont linéaires par rapport à $y, z, \ldots, u$, et renferment x d'une manière quelconque; et il est facile de voir qu'alors l'équation finale en y est linéaire.

Quant à la détermination des autres inconnues, il est important d'observer que, l'élimination ayant lieu entre des équations du premier degré en $z, \ldots, u$, lorsqu'on connaîtra y, on tirera les valeurs de ces inconnues, de celles que l'on voudra des équations (1) elles-mêmes; car ces équations doivent être satisfaites, et de plus ne donneront qu'une seule valeur pour chaque inconnue.

Si ces équations ne sont pas du premier ordre, on peut les traiter par les méthodes indiquées précédemment. On peut aussi les ramener à des équations du premier ordre, en posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots, \quad \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y^{(m-1)},$$

et de même pour les variables $z, \ldots, u$.

On aura ainsi un plus grand nombre d'équations; mais il y en aura toujours un nombre inférieur d'une unité au nombre total des variables, et elles seront linéaires et du premier ordre par rapport à toutes les variables.

Si par exemple on avait les deux équations

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{d^2z}{dx^2}+C\frac{dy}{dx}+D\frac{dz}{dx}+Ey+Fz+H=0,$$

$$A'\frac{d^2y}{dx^2}+B'\frac{d^2z}{dx^2}+C'\frac{dy}{dx}+D'\frac{dz}{dx}+E'y+F'z+H'=0,$$

elles seraient remplacées par le système suivant :

$$\frac{dy}{dx}=y',\quad \frac{dz}{dx}=z';$$

$$A\frac{dy'}{dx}+B\frac{dz'}{dx}+Cy'+Dz'+Ey+Fz+H=0,$$

$$A'\frac{dy'}{dx}+B'\frac{dz'}{dx}+C'y'+D'z'+E'y+F'z+H'=0.$$

Les deux dernières donneront $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{dz'}{dx}$ en fonction linéaire de y', z', y, z; et, en opérant comme nous l'avons indiqué, nous aurons quatre équations de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx}=y',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=My'+Nz'+Py+Qz+R,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=M'y'+N'z'+P'y+Q'z+R',$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=M''y'+N''z'+P''y+Q''z+R''.$$

On éliminera z, z', y' entre ces quatre équations, et l'on aura une équation linéaire du quatrième ordre en y. Quand elle sera intégrée, on substituera la valeur de y

dans trois des premières, et l'on en tirera la valeur de z qui renfermera les quatre constantes qui entrent déjà dans y. Si l'on avait suivi l'autre marche, on aurait différentié deux fois chacune des équations données, et l'on aurait eu six équations entre lesquelles on aurait éliminé z, $\frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^4z}{dx^4}$. On aurait ensuite substitué à y sa valeur en fonction de x et de quatre constantes arbitraires, dans les cinq équations conjointes; et l'on en aurait tiré la valeur de z en fonction de x et des mêmes *constantes arbitraires*.

Équations linéaires simultanées du premier ordre.

78. Ces équations peuvent être résolues par rapport aux dérivées des m variables y, $z, \ldots, u$; et nous supposerons d'abord que les coefficients de ces variables soient des constantes données, mais que les termes qui en sont indépendants puissent être des fonctions quelconques de x. Nous aurons des équations de la forme suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + \ldots + P_1 u = X_1, \\ \frac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + \ldots + P_2 u = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du}{dx} + A_m y + B_m z + \ldots + P_m u = X_m. \end{array}\right.$$

On pourrait les traiter par les méthodes précédentes, et l'on parviendrait à une équation linéaire de l'ordre m à coefficients constants. Mais il est plus simple d'employer le procédé suivant:

Multipliant ces équations, à partir de la seconde, par les indéterminées $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}$, puis les ajoutant, nous

aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(y+\theta_1 z+\ldots+\theta_{m-1}u)}{dx}+(A_1+A_2\theta_1+\ldots+A_m\theta_{m-1})y\\ &\qquad+(B_1+B_2\theta_1+\ldots+B_m\theta_{m-1})z+\ldots\\ &\qquad+(P_1+P_2\theta_1+\ldots+P_m\theta_{m-1})u\\ &\qquad=X_1+X_2\theta_1+\ldots+X_m\theta_{m-1}.\end{aligned}\right.$$

Or cette équation ne renfermerait plus que la seule variable $y+\theta_1 z+\ldots+\theta_{m-1}u$, si les rapports des coefficients de $z,\ldots, u$ au coefficient de y, étaient respectivement θ_1, $\theta_2,\ldots, \theta_{m-1}$; et ces conditions détermineront, comme on va le voir, les valeurs de $\theta_1,\ldots, \theta_{m-1}$. Si l'on désigne par $-a$ le coefficient indéterminé de y, on sera conduit aux m équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &A_1+A_2\theta_1+\ldots+A_m\theta_{m-1}=-a,\\ &B_1+B_2\theta_1+\ldots+B_m\theta_{m-1}=-a\theta_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &P_1+P_2\theta_1+\ldots+P_m\theta_{m-1}=-a\theta_{m-1}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations détermineront les m inconnues a, $\theta_1,\ldots, \theta_{m-1}$, et si l'on désigne par X la fonction connue

$$X_1+X_2\theta_1+\ldots+X_m\theta_{m-1},$$

l'équation (2) deviendra, en faisant $y+\theta_1 z+\ldots+\theta_{m-1}u=v$,

$$(4)\qquad \frac{dv}{dx}-av=X,$$

équation linéaire que l'on sait intégrer. Mais occupons-nous d'abord de la résolution des équations (3).

En laissant de côté la première, on a $m-1$ équations du premier degré, qui détermineront θ_1, $\theta_2,\ldots, \theta_{m-1}$ en fonction de a; les reportant dans la première, on n'aura plus que l'inconnue a, et il est facile de voir que l'équation sera du degré m. En effet, si l'on réunit les coeffi-

cients des mêmes inconnues dans les $m-1$ équations, d'où l'on tire $\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$, on observera que a entre au premier degré dans le coefficient de θ_1 dans la première, de θ_2 dans la seconde, etc., enfin de θ_{m-1} dans la dernière, et que, de plus, il n'entre dans aucun autre. Donc le dénominateur commun des valeurs de ces inconnues renfermera a au degré $m-1$, et le numérateur, au degré $m-2$ seulement. Quand on fera la substitution dans la première et qu'on chassera le dénominateur, on aura évidemment une équation du degré m en a.

Actuellement, l'équation (4) donne

$$v = e^{ax}\left(C + \int Xe^{-ax}dx\right) = y + \theta_1 z + \ldots + \theta_{m-1} u.$$

Si l'on met successivement dans cette équation les m valeurs de a, on aura à chaque fois des valeurs différentes pour $\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$, et l'on pourra prendre pour la constante C des valeurs différentes arbitraires, puisque toutes ces équations subsistent indépendamment les unes des autres.

On aura donc ainsi m équations du premier degré entre x et les m variables y, $z,\ldots,u$. Les valeurs de ces variables en fonction de x renfermeront m constantes arbitraires, et seront de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} y = \alpha_1 e^{a_1 x}\left(C_1 + \int Xe^{-a_1 x}dx\right) + \alpha_2 e^{a_2 x}\left(C_2 + \int Xe^{-a_2 x}dx\right) + \ldots, \\ z = 6_1 e^{a_1 x}\left(C_1 + \int Xe^{-a_1 x}dx\right) + 6_2 e^{a_2 x}\left(C_2 + \int Xe^{-a_2 x}dx\right) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les valeurs des constantes se détermineront très-facilement si pour une certaine valeur x_0 de x on connaît les valeurs y_0, $z_0,\ldots,u_0$ des fonctions y, $z,\ldots,u$. En effet, on prendra, pour plus de simplicité, toutes les intégrales à partir de x_0; et si, dans la valeur de v trouvée ci-dessus, on fait $x = x_0$, on aura

$$Ce^{ax_0} = y_0 + \theta_1 z_0 + \ldots + \theta_{m-1} u_0,$$

ce qui détermine la constante C relative à une quelconque des valeurs de a, $\theta_1,\ldots$. On connaîtra donc ainsi les m constantes $C_1, C_2,\ldots, C_m$.

Si les seconds membres des équations (1) étaient nuls, on aurait seulement

$$y = C\alpha_1 e^{a_1 x} + C_1\alpha_2 e^{a_2 x} + \ldots$$
$$z = C6_1 e^{a_1 x} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on suppose toutes les constantes nulles, excepté une, on aura des solutions de la forme

$$y = C\alpha_1 e^{a_1 x}, \quad z = C6_1 e^{a_1 x}.$$

Les rapports des variables sont constants, quel que soit C, et les valeurs générales sont formées des sommes de ces solutions particulières correspondantes aux divers exposants $a_1,\ldots, a_m$.

79. Soient pour exemple les deux équations

$$(\alpha) \qquad \frac{dy}{dx} + Ay + Bz = 0, \quad \frac{dz}{dx} + A_1 y + B_1 z = 0.$$

Multipliant la seconde par θ, et l'ajoutant à la première, il vient

$$\frac{d(y+\theta z)}{dx} + (A + \theta A_1)y + (B + \theta B_1)z = 0.$$

Posons

$$(6) \qquad y + \theta z = v, \quad A + \theta A_1 = -a, \quad B + \theta B_1 = -a\theta,$$

l'équation précédente deviendra

$$(\gamma) \qquad \frac{dv}{dx} - av = 0,$$

et θ sera déterminé par l'équation

$$\frac{B + \theta B_1}{\theta} = A + \theta A_1,$$

ou

$$(\delta) \qquad A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B = 0.$$

Soient θ_1, θ_2 les deux racines de cette équation; ν_1, ν_2 les valeurs correspondantes de ν; a_1, a_2 celles de x; on aura

$$y + \theta_1 z = \nu_1, \quad y + \theta_2 z = \nu_2,$$

d'où l'on tirera

$$(\varepsilon) \qquad z = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad y = \frac{\nu_1\theta_2 - \nu_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Or l'équation (γ) donne $\nu = Ce^{ax}$; et si l'on désigne par C_1, C_2 les valeurs de la constante C correspondantes à θ_1, θ_2, les équations (ε) deviendront

$$(\zeta) \qquad z = \frac{C_2 e^{a_2 x} - C_1 e^{a_1 x}}{\theta_2 - \theta_1}, \quad y = \frac{C_1\theta_2 e^{a_1 x} - C_2\theta_1 e^{a_2 x}}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Si les racines de l'équation (δ) étaient imaginaires, les valeurs de y et z se présenteraient sous une forme imaginaire, et on leur donnerait la forme réelle par les transformations ordinaires. Mais si ces racines étaient égales, les dénominateurs de y et z deviendraient nuls; alors les formules (ζ) seraient absurdes, à moins qu'on ne supposât, comme on peut le faire, que les constantes C_2, C_1 devinssent égales en même temps que θ_2, θ_1, et ces formules donneraient les valeurs de y et z sous la forme $\frac{0}{0}$.

Pour déduire des équations (ζ) les valeurs relatives à ce cas particulier, on pourra supposer que les coefficients des équations (α) ou seulement l'un d'eux choisi à volonté, soient modifiés de manière que les valeurs de θ ne soient plus égales, et qu'on fasse tendre ensuite ces coefficients vers les valeurs données. Il suffira de trouver les limites des valeurs de y et z, avec deux constantes arbitraires, pour avoir la solution cherchée. On pourrait

suivre pour cela la même marche qui a été suivie précédemment dans un cas semblable ; mais il est possible d'abréger le calcul par les considérations suivantes, qui sont applicables dans d'autres circonstances.

On remarquera d'abord que les deux termes des fractions qui représentent y et z peuvent être regardés comme des fonctions de la variable θ_2 qui tend vers la limite θ_1 : car a dépend de θ, par la seconde des équations (6), et la constante C_2 tendant vers C_1 peut être considérée comme une fonction arbitraire de θ_2, ayant pour limite C_1. On pourra donc traiter les formules (ζ) d'après les règles ordinaires relatives aux fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$ pour une valeur particulière d'une lettre qu'elles renferment.

Différentiant donc par rapport à θ_2 les deux termes des fractions qui représentent y et z, on aura pour la première

$$\frac{dC_2}{d\theta_2} e^{a_2 x} + C_2 x e^{a_2 x} \frac{da_2}{d\theta_2},$$

et pour la seconde,

$$C_1 e^{a_1 x} - \theta_1 \frac{dC_2}{d\theta_2} e^{a_2 x} - C_2 \theta_1 x e^{a_2 x} \frac{da_2}{d\theta_2},$$

et l'on aura les limites de y et z, en faisant dans ces expressions $\theta_2 = \theta_1$, $a_2 = a_1$, $C_2 = C_1$, et observant que $\frac{dC_2}{d\theta_2}$ sera une constante entièrement arbitraire C, puisque C_2 est une fonction arbitraire de θ_2. Quant à $\frac{da_2}{d\theta_2}$, on en déterminera la valeur au moyen de la seconde équation (6), dans laquelle on considérera A et A_1 constants, et qui donne

$$\frac{da}{d\theta} = - A_1.$$

On trouvera ainsi, pour le cas des racines égales,

$$z=(C-C_1A_1x)e^{a_1x},\quad y=(C_1-\theta_1C+\theta_1C_1A_1x)e^{a_1x}.$$

80. Si, dans les équations (1), les coefficients A_1, $A_2,\ldots$, P_1, $P_2,\ldots$ étaient fonction de x, la méthode employée devrait nécessairement être modifiée, parce que $\frac{dy}{dx}+\theta_1\frac{dz}{dx}+\ldots+\theta_{m-1}\frac{du}{dx}$ ne serait plus la dérivée de $y+\theta_1 z+\ldots+\theta_{m-1}u$, vu que les facteurs $\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$ ne pourraient plus être constants. Néanmoins on commencerait de la même manière, et l'on poserait

$$y+\theta_1 z+\ldots+\theta_{m-1}u=v,$$

d'où l'on tirerait

$$\frac{dy}{dx}+\theta_1\frac{dz}{dx}+\ldots+\theta_{m-1}\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}-z\frac{d\theta_1}{dx}-\ldots-u\frac{d\theta_{m-1}}{dx}.$$

L'équation précédente servirait à éliminer y de l'équation obtenue en ajoutant les m équations; on égalerait ensuite à zéro les coefficients des $m-1$ variables $z,\ldots,u$, dans cette équation; il en résulterait d'abord $m-1$ équations non linéaires du premier ordre entre les $m-1$ variables $\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$, et en outre une équation du premier ordre en v, que l'on traiterait après la détermination de $\theta_1,\ldots,\theta_m$. Pour donner un exemple de ce procédé, soient les deux équations

$$(a)\quad \frac{dy}{dx}+Ay+Bz=X,\quad \frac{dz}{dx}+A_1y+B_1z=X_1;$$

multipliant la seconde par θ, et l'ajoutant à la première, il vient

$$(b)\quad \frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}+(A+\theta A_1)y+(B+\theta B_1)z=X+\theta X_1.$$

Posons

$$y + \theta z = v, \quad \text{d'où} \quad y = v - \theta z,$$

et

$$\frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dx} - z \frac{d\theta}{dx};$$

l'équation (*b*) devient alors

$$\frac{dv}{dx} - z\left[\frac{d\theta}{dx} + A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B\right] + (A + \theta A_1)v = X + \theta X_1.$$

Si l'on égale à zéro le coefficient de z, on aura, au lieu de cette équation, les deux suivantes :

$$(c) \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dx} + A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B = 0, \\ \dfrac{dv}{dx} + (A + \theta A_1)v = X + \theta X_1. \end{cases}$$

On commencera par chercher à intégrer la première, qui ne renferme que θ et x; et si l'on peut y parvenir, la seconde donnera v sans difficulté. On déterminera ensuite y et z en prenant deux valeurs de θ correspondantes à deux valeurs de la constante qu'elle renferme.

Si les coefficients sont constants, on peut satisfaire à la première des équations (*c*) en posant

$$A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B = 0,$$

ce qui donnerait pour θ deux valeurs; on en trouverait, par suite, deux pour v, et l'on en déduirait y et z. On pourrait aussi intégrer généralement l'équation en θ, et prendre deux valeurs de cette fonction de x correspondantes à deux valeurs de la constante, comme dans le cas où les coefficients étaient fonctions de x.

Ce dernier procédé sera appliqué avec avantage au cas où les deux racines de l'équation

$$A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B = 0$$

étant égales, les formules données par le premier deviennent illusoires. Dans ce cas, on a, en désignant par α cette valeur de θ,

$$\frac{d\theta}{dx} + A_1(\theta - \alpha)^2 = 0,$$

d'où

$$\theta = \alpha + \frac{1}{A_1 x + c},$$

c étant une constante arbitraire. En donnant à c les deux valeurs 0 et ∞, qui sont ici les plus commodes, on trouve pour θ les deux valeurs α et $\alpha + \frac{1}{A_1 x}$ qui, substituées dans la seconde équation (c), donneront deux valeurs de ν, d'où l'on tirera y et z.

81. *Autre méthode dans le cas des coefficients constants.* — Lorsque les derniers termes $X_1, \ldots, X_m$ des équations (1) manquent, on remarque d'abord que la somme de plusieurs systèmes de valeurs de $y, \ldots, u$, qui satisfont séparément à ces équations, y satisfait aussi, et que, par conséquent, il suffit de trouver m systèmes renfermant chacun une constante arbitraire.

Pour cela on établira des rapports déterminés arbitraires entre les variables, en posant

$$z = \alpha y, \ldots, u = \mu y;$$

d'où résulteront les équations suivantes :

$$\frac{dy}{dx} + y(A_1 + B_1\alpha + \ldots + P_1\mu) = 0,$$

$$\alpha\frac{dy}{dx} + y(A_2 + B_2\alpha + \ldots + P_2\mu) = 0,$$

. . . .

$$\mu\frac{dy}{dx} + y(A_m + B_m\alpha + \ldots + P_m\mu) = 0.$$

Pour que ces équations s'accordent, on aura les $m - 1$

conditions

$$A_2 + B_2\alpha + \ldots + P_2\mu = \alpha(A_1 + B_1\alpha + \ldots + P_1\mu),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m + B_m\alpha + \ldots + P_m\mu = \mu(A_1 + B_1\alpha + \ldots + P_1\mu),$$

ou, en introduisant une nouvelle inconnue $-a$ qui représente le facteur commun à tous les seconds membres,

$$(6)\quad \begin{cases} A_1 + B_1\alpha + \ldots + P_1\mu = -a, \\ A_2 + B_2\alpha + \ldots + P_2\mu = -a\alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m + B_m\alpha + \ldots + P_m\mu = -a\mu. \end{cases}$$

Si des $m - 1$ dernières on tire les valeurs de α, $\beta, \ldots, \mu$, on reconnaîtra, comme dans le cas précédent, que l'équation en a est du $m^{ième}$ degré, et il serait facile de prouver l'identité de ces deux équations en a, d'après la forme des équations (3) et (6).

Pour chaque valeur de a on aura un système de valeurs de α, $\beta, \ldots, \mu$, et il ne s'agit plus que de connaître y, qui sera donné par l'équation

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0,$$

d'où $y = Ce^{ax}$, C étant arbitraire; on aura donc une solution des équations proposées, en prenant

$$y = Ce^{ax},\quad z = C\alpha e^{ax}, \ldots, u = C\mu e^{ax}.$$

On aura m systèmes semblables, en prenant pour a ses m valeurs; ils renfermeront chacun une constante arbitraire, et, en les ajoutant, on aura la solution générale de la question, exprimée par les formules suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + \ldots + C_m e^{a_m x}, \\ z = C_1\alpha_1 e^{a_1 x} + C_2\alpha_2 e^{a_2 x} + \ldots + C_m\alpha_m e^{a_m x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u = C_1\mu_1 e^{a_1 x} + C_2\mu_2 e^{a_2 x} + \ldots + C_m\mu_m e^{a_m x}. \end{cases}$$

Si plusieurs des racines $a_1, a_2, \ldots, a_m$ devenaient égales, on agirait comme on l'a déjà fait en pareille circonstance, et les valeurs de y, $z, \ldots, u$ contiendraient toujours m constantes arbitraires.

82. Il est facile de passer de ce cas à celui des équations (1) : il suffit, pour cela, de substituer aux constantes $C_1, C_2, \ldots, C_m$ des fonctions de x, comme nous l'avons déjà fait dans une circonstance analogue.

Différentiant les équations (7) et reportant les valeurs de $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}$ dans les équations (1), il ne restera que les termes affectés des différentielles de $C_1, \ldots, C_m$, et les seconds membres $X_1, \ldots, X_m$.

On aura ainsi

$$e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} + e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + e^{a_m x}\frac{dC_m}{dx} = X_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_1 e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} + \mu_2 e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + \mu_m e^{a_m x}\frac{dC_m}{dx} = X_m.$$

On tirera de là les valeurs de $\frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_m}{dx}$ en fonction de x; et, en les intégrant, on connaîtra $C_1, \ldots, C_m$. Si on les substitue dans les équations (7), on aura les solutions générales des équations (1), renfermant les m constantes qui proviennent des quadratures relatives à $C_1, \ldots, C_m$.

83. On peut appliquer à plusieurs équations simultanées une remarque qui a été faite précédemment dans le cas d'une seule équation différentielle.

Soient par exemple les deux équations du premier ordre

$$(1)\qquad F(x, y, z, y', z') = 0, \quad f(x, y, z, y', z') = 0,$$

dans lesquelles on suppose $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$.

Admettons qu'on connaisse les intégrales générales de ces deux équations, et représentons-les par

(2) $y = \varphi(x, a, b), \quad z = \psi(x, a, b),$

a et b étant deux constantes arbitraires.

Les équations (1) deviendraient identiques en x, a, b, si l'on y substituait les expressions (2). Si nous les différentions par rapport à a dans cette supposition, nous aurons des résultats identiquement nuls; d'où résulteront les équations

$$\frac{dF}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{da} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{da} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{da} = 0,$$

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{da} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{da} + \frac{df}{dz'}\frac{dz'}{da} = 0,$$

ou, en posant $\frac{dy}{da} = u$, $\frac{dz}{da} = v$,

(3) $$\begin{cases} \frac{dF}{dy}u + \frac{dF}{dz}v + \frac{dF}{dy'}\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dz'}\frac{dv}{dx} = 0, \\ \frac{df}{dy}u + \frac{df}{dz}v + \frac{df}{dy'}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dz'}\frac{dv}{dx} = 0. \end{cases}$$

Concevons maintenant que dans les coefficients $\frac{dF}{dy} \cdots \frac{df}{dy} \cdots$ on ait remis pour y, z, y', z' leurs valeurs en x, a, b, on aura deux équations linéaires en u, v, à coefficients fonctions de x, qui seront satisfaites quand on y mettra pour u et v les fonctions $\frac{d\varphi}{da}$, $\frac{d\psi}{da}$.

On verrait semblablement que les équations (3) admettent pour solution $\frac{d\varphi}{db}$, $\frac{d\psi}{db}$.

Donc, si l'on désigne par A et B deux constantes arbitraires, les intégrales générales des équations (3)

seront

$$u = A\frac{d\varphi}{da} + B\frac{d\varphi}{db},$$

$$v = A\frac{d\psi}{da} + B\frac{d\psi}{db}.$$

Si l'on n'avait donné que des valeurs de y et z avec une seule constante a, on n'aurait pu avoir qu'une intégrale particulière du système (3).

On voit ainsi que, lorsqu'on connaîtra les intégrales générales d'équations simultanées de forme et d'ordre quelconques, on pourra former un système d'équations linéaires simultanées, respectivement de même ordre, à coefficient variable et dont les intégrales générales se déduiront des premières par de simples différentiations.

Intégration par séries.

84. Nous avons déjà vu comment on pouvait, au moyen des théorèmes de Taylor et Maclaurin, développer en série l'intégrale d'une équation différentielle d'un ordre quelconque. On y parvient encore au moyen des coefficients indéterminés. Nous allons donner quelques exemples de l'une et de l'autre méthode.

Considérons d'abord l'équation

$$(1) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + nxy = 0;$$

on trouve, en la différentiant,

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + nx\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

$$x\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + nx\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} = 0,$$

. . . .

$$x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (m+1)\frac{d^my}{dx^m} + nx\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)n\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = 0.$$

Faisant $x = 0$ dans toutes ces équations, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{n}{3}y, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{n^2}{5}y, \ldots,$$

et, en général, si m est impair,

$$\frac{d^my}{dx^m} = 0;$$

et s'il est pair,

$$\frac{d^my}{dx^m} = \frac{n^{\frac{m}{2}}y}{m+1}, \quad \text{ou} \quad -\frac{n^{\frac{m}{2}}y}{m+1},$$

suivant qu'il est ou non divisible par 4.

On tire de là

$$\begin{aligned} y &= y_0\left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{n^3x^6}{1\ldots\ldots7} + \ldots\right) \\ &= y_0 \frac{\sin.x\sqrt{n}}{x\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en représentant par C la constante arbitraire $\frac{y_0}{\sqrt{n}}$, on a

$$y = \frac{C\sin.x\sqrt{n}}{x}.$$

Cette expression, ne renfermant qu'une constante, n'est pas l'intégrale générale; elle donne seulement celle qui peut se développer suivant la formule de Maclaurin.

Connaissant une intégrale particulière, on aura l'intégrale générale en regardant C comme fonction de x; et l'on sera conduit, d'après la méthode exposée précédemment, à une équation linéaire du premier ordre.

On trouve d'abord, en substituant la valeur de y dans l'équation proposée,

$$\frac{d^2C}{dx^2} + 2\sqrt{n}\frac{dC}{dx}\cot.x\sqrt{n} = 0;$$

posant $\frac{dC}{dx} = p$, on parvient à

$$p = \frac{C_1}{\sin^2.x\sqrt{n}},$$

C_1 étant une constante arbitraire; on déduit de là

$$C = C' + C'' \cot.x\sqrt{n},$$

C' et C'' étant des constantes arbitraires. L'intégrale générale de la proposée est donc

$$(2) \qquad y = \frac{C' \sin.x\sqrt{n} + C'' \cos.x\sqrt{n}}{x}.$$

85. Si l'on employait la formule de Taylor, au lieu de celle de Maclaurin, on obtiendrait l'intégrale générale. L'équation (1) ferait connaître la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de y_0 et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ relatifs à la valeur arbitraire x_0; et ses dérivées successives feront connaître $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0$, etc., ce qui déterminera le développement de y suivant les puissances de $x - x_0$, renfermant deux constantes arbitraires. Il est facile de vérifier que cette valeur de y coïncide avec celle que donne l'équation (2), en développant celle-ci par rapport aux puissances de $x - x_0$, après l'avoir mise préalablement sous la forme

$$y = \frac{C_1 \sin.(x - x_0)\sqrt{n} + C_2 \cos.(x - x_0)\sqrt{n}}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}}.$$

86. Intégrons maintenant la même équation par la méthode des coefficients indéterminés. Soit

$$y = a_1 x^\alpha + a_2 x^6 + a_3 x^\gamma + a_4 x^\delta + \ldots.$$

La série étant ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x, on en déduit

$$ny = na_1 x^\alpha + na_2 x^\beta + na_3 x^\gamma + \ldots,$$

$$\frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 2a_1\alpha x^{\alpha-2} + 2a_2\beta x^{\beta-2} + 2a_3\gamma x^{\gamma-2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_1\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_2\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + a_3\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots.$$

La somme des seconds membres de ces équations doit être nulle, quel que soit x, en vertu de l'équation proposée : ce qui exige que les coefficients des termes de degrés différents soient nuls séparément.

Le plus faible exposant est $\alpha - 2$; le coefficient du terme total de ce degré donne la condition $\alpha(\alpha+1) = 0$, équation à laquelle on satisfait par $\alpha = -1$ ou $\alpha = 0$.

1°. Soit $\alpha = -1$. Le terme $na_1 x^\alpha$ ne pouvant disparaître de lui-même doit se réduire avec d'autres ; il faut donc que α ne soit pas inférieur à $\beta - 2$. Si $\beta - 2 < \alpha$, il faudra $\beta(\beta+1) = 0$ pour que les termes de degré $\beta - 2$ se détruisent, ce qui ne donne que $\beta = 0$, puisque $\beta > \alpha$. Il faudra ensuite que l'on ait

$$\gamma - 2 = \alpha, \quad \delta - 2 = \beta, \ldots;$$

les coefficients donneront les conditions

$$a_3\gamma(\gamma+1) + na_1 = 0, \quad a_4\delta(\delta+1) + na_2 = 0, \ldots.$$

On tire de ces diverses équations

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \ldots,$$

$$a_3 = \frac{a_1 n}{1.2}, \quad a_5 = \frac{a_1 n^2}{1.2.3.4}, \ldots,$$

$$a_4 = -\frac{a_2 n}{1.2.3}, \quad a_6 = \frac{a_2 n^2}{1.2.3.4.5}, \ldots$$

. . . .

Il y a donc deux constantes indéterminées a_1, a_2, et la valeur de y est

$$y = a_1\left(\frac{1}{x} - \frac{nx}{1.2} + \frac{n^2x^3}{1.2.3.4} - \frac{n^3x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)$$
$$+ a_2\left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right),$$

ou

$$y = \frac{a_1 \cos.x\sqrt{n}}{x} + \frac{\frac{a_2}{\sqrt{n}}\sin.x\sqrt{n}}{x},$$

solution identique avec celle que nous avions déjà trouvée.

Nous avons pris $6 - 2 < \alpha$, mais nous aurions pu prendre $6 - 2 = \alpha$. Dans ce cas, nous aurions trouvé seulement $y = \frac{a_1 \cos x\sqrt{n}}{x}$, ce qui n'est qu'une intégrale particulière. La solution n'aurait été complète qu'en considérant l'hypothèse $\alpha = 0$ que nous avons déjà indiquée, et que nous allons examiner.

2°. Soit $\alpha = 0$. Dans ce cas on ne peut avoir $6 - 2 < \alpha$, parce que le coefficient de x^{6-2} devrait être nul, ce qui donnerait $6(6 + 1) = 0$, équation impossible puisque $6 > \alpha$. On aura donc $6 - 2 = \alpha$, et, par suite, $\gamma - 2 = 6\ldots$

Les exposants ont donc les valeurs suivantes :

$$\alpha = 0, \quad 6 = 2, \quad \gamma = 4, \ldots;$$

les coefficients seront

$$a_2 = -\frac{a_1 n}{1.2.3}, \quad a_3 = \frac{a_1 n^2}{1.2.3.4.5}, \ldots,$$

et, par suite,

$$y = \frac{\frac{a_1}{\sqrt{n}}\sin.x\sqrt{n}}{x}.$$

On ne trouve donc encore qu'une intégrale particulière, puisqu'il n'y a qu'une constante arbitraire. Réunie à celle que nous avions trouvée en dernier lieu, elle donnerait l'intégrale générale.

87. Soit encore l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0;$$

posons

$$y = A_1 x^\alpha + A_2 x^\beta + A_3 x^\gamma + \ldots,$$

on aura

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = A_1 \alpha x^{\alpha-2} + A_2 \beta x^{\beta-2} + A_3 \gamma x^{\gamma-2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_2\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + A_3\gamma(\gamma-1)^{\gamma-2} + \ldots.$$

La somme des seconds membres de ces trois équations doit être identiquement nulle en vertu de l'équation proposée. Les termes renfermant $x^{\alpha-2}$ doivent se détruire, ce qui donne $\alpha(\alpha-1) + \alpha = 0$ ou $\alpha = 0$.

Les termes renfermant $x^{\beta-2}$ ne sauraient, dans ce cas, être de degré inférieur à α; car leurs coefficients donneraient $\beta = 0$, ce qui ne peut être. Donc

$$\beta - 2 = \alpha, \quad \gamma - 2 = \beta, \ldots.$$

Ainsi

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \ldots.$$

Les coefficients donnent les conditions

$$A_2\beta^2 + A_1 = 0, \quad A_3\gamma^2 + A_2 = 0, \ldots,$$

d'où

$$A_2 = -\frac{A_1}{2^2}, \quad A_3 = \frac{A_1}{2^2.4^2}, \quad A_4 = -\frac{A_1}{2^2.4^2.6^2}, \ldots,$$

et, par suite,

$$y = A_1\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right).$$

On ne trouve par ce procédé qu'une intégrale particulière, puisqu'il n'y entre qu'une constante arbitraire.

88. En appliquant le même procédé à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{x} = 0,$$

on trouvera

$$y = A_1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2.3} - \frac{x^4}{2^2.3^2.4} + \frac{x^5}{2^2.3^2.4^2.5} \cdots\right),$$

ce qui n'est encore qu'une intégrale particulière; d'où l'on conclut que l'intégrale générale n'est pas développable suivant les puissances positives ou négatives, entières ou fractionnaires de x.

Intégration des équations différentielles au moyen des intégrales définies.

89. Nous avons donné des moyens pour ramener, dans certains cas, l'intégration des équations différentielles à celle de fonctions de x ou de y seulement. Quand cela n'est pas possible, on cherche quelquefois à ramener le problème à l'intégration d'une fonction renfermant x et une autre variable, par rapport à laquelle on intègre entre des limites déterminées, en regardant x comme une constante. Cette forme d'intégrale définie, donnée à y, est souvent utile dans les questions de physique mathématique, et elle le serait bien davantage encore si l'on avait des tables qui fissent connaître la valeur de cette intégrale pour une valeur quelconque de la constante x qu'elle renferme.

90. Un moyen que l'on emploie souvent pour obtenir ainsi la valeur de y consiste à développer d'abord cette valeur en série, et à sommer cette série, lorsqu'on peut reconnaître une relation simple entre son terme général

et l'intégrale définie du terme général du développement d'une fonction connue de x et d'une autre variable, par rapport à laquelle se fait l'intégration. C'est ce que nous allons éclaircir par des exemples.

Soit l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

qui se présente dans beaucoup de questions de physique et de mécanique. En l'intégrant par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient les deux séries suivantes, qui fournissent chacune une intégrale particulière :

$$y = A\left\{\begin{array}{l} x^{-m+1} - \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)x^{-m+3}}{1.(-m+3)} + \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^{-m+5}}{1.2.(-m+3)(-m+5)} + \ldots \\ + \dfrac{\left(-\frac{n}{2}\right)^p x^{-m+2p+1}}{1.2\ldots p.(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2p+1)} + \ldots \end{array}\right\},$$

$$y = A'\left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\frac{n}{2}x^2}{1.(m+1)} + \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1.2.(m+1)(m+3)} \\ - \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^6}{1.2.3.(m+1)(m+3)(m+5)} + \ldots \\ + \dfrac{\left(-\frac{n}{2}\right)^p x^{2p}}{1.2\ldots p.(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)} + \ldots \end{array}\right\}.$$

Si l'on ajoutait ces deux valeurs de y, on aurait l'intégrale générale renfermant deux constantes arbitraires A et A'. La première de ces deux séries devient illusoire lorsque y est un nombre positif impair, et la seconde lorsque m est un nombre négatif impair. Ainsi, dans

tous les cas, l'une des deux subsiste, et l'on sait comment, une intégrale particulière étant connue, on pourra trouver l'inégrale générale. Si l'on désigne par y_1 l'intégrale connue, l'intégrale générale sera donnée par la formule

$$(2) \qquad y = Cy_1 + C'y_1 \int \frac{dx}{x^m y_1^2}.$$

Pour obtenir une série de même forme que la seconde des deux précédentes, considérons d'abord le développement suivant :

$$\cos(\alpha\cos\omega) = 1 - \frac{\alpha^2\cos^2\omega}{2} + \frac{\alpha^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{(-\alpha^2)^p\cos^{2p}}{1.2.3\ldots 2p} + \ldots;$$

multiplions les deux membres par $\sin^{m-1}\omega d\omega$ et intégrons entre o et π, en supposant toutefois m positif, sans quoi l'intégrale serait infinie. En ayant égard à la formule suivante, qui s'obtient par les procédés connus de réduction,

$$\int_0^\pi \cos^{2i}\omega \sin^\mu \omega d\omega$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)}{(\mu+2)(\mu+4)\ldots(\mu+2i-2)(\mu+2i)} \int_0^\pi \sin^\mu \omega d\omega,$$

et dans laquelle il faut, pour la même raison, supposer $\mu > -1$, on arrivera à l'équation

$$\int_0^\pi \cos(\alpha\cos\omega)\sin^{m-1}\omega d\omega = \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega d\omega - \ldots$$

$$+ \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^p \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega d\omega}{1.2.3\ldots p.(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)} + \ldots,$$

ou, en posant $\alpha = x\sqrt{n}$, et mettant $\int_0^\pi \sin^{m-1}\omega d\omega$ en

facteur,

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin^{m-1}\omega d\omega$$

$$= \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega d\omega \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\frac{nx^2}{2}}{1.(m+1)} + \dfrac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1.2.(m+1)(m+3)} - \ldots \\ + \dfrac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1.2\ldots p.(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)} + \ldots \end{array} \right\},$$

ce qui n'est autre chose que notre seconde série, à un facteur constant près. L'intégrale qu'elle exprime peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$y = B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin^{m-1}\omega d\omega,$$

pourvu que l'on ait $m > 0$.

Quant à la première série, qui peut s'écrire ainsi :

$$y = Ax^{-m+1} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\frac{nx^2}{2}}{1.(-m+3)} + \dfrac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1.2.(-m+3)(-m+5)} - \ldots \\ + \dfrac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1.2\ldots p.(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2p+1)} + \ldots \end{array} \right\},$$

on voit que la série comprise entre les parenthèses ne diffère de la précédente que par le changement de m en $-m+2$. On pourra donc mettre cette dernière équation sous la forme suivante, pourvu que l'on ait $m < 2$,

$$y = B_1 x^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin^{1-m}\omega d\omega,$$

B_1 étant une constante arbitraire. L'intégrale générale de

l'équation (1) sera donc

$$(3)\quad \begin{cases} y = B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin^{m-1}\omega d\omega \\ \quad + B_1 x^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin^{1-m}\omega d\omega, \end{cases}$$

toutes les fois que l'on aura les deux conditions

$$m > 0, \quad m < 2.$$

Si m est en dehors de ces limites, une seule des deux intégrales subsistera, et l'équation (3), réduite à l'un de ses deux termes, ne donnera plus qu'une intégrale particulière. Dans ce cas, l'équation (2) fera connaître l'intégrale générale.

Considérons maintenant les deux cas particuliers correspondants à $m = 0$, et $m = 2$.

91. Soit d'abord $m = 0$, ce qui réduit l'équation proposée à $\frac{d^2y}{dx^2} + ny = 0$. On devra se borner à la seconde partie de la formule (3), et l'on aura l'intégrale particulière

$$y_1 = B_1 x\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega d\omega.$$

Effectuant l'intégration et représentant par C une constante arbitraire, il vient

$$y_1 = C\sin.x\sqrt{n}.$$

La formule (2) donnera par suite, en représentant par C_1 une seconde constante arbitraire,

$$(4)\qquad y = C\sin.x\sqrt{n} + C_1\cos.x\sqrt{n}.$$

On serait arrivé plus simplement à ce résultat en traitant

directement l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ny = 0.$$

En opérant comme nous l'avons indiqué pour les équations linéaires à coefficients constants, on trouve immédiatement la formule (4).

92. Soit maintenant $m = 2$, et, par suite,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0; \tag{5}$$

on ne conservera que le premier terme de la formule (3), et, en effectuant l'intégration, on trouvera

$$y_1 = \frac{C \sin . x\sqrt{n}}{x}.$$

D'après cela, l'équation (2) donnera pour la valeur de l'intégrale générale,

$$y = \frac{C \sin . x\sqrt{n} + C_1 \cos . x\sqrt{n}}{x}.$$

On aurait pu traiter directement l'équation (5), et poser $y = \frac{u}{x}$; on obtiendrait ainsi

$$\frac{d^2u}{dx^2} + nu = 0,$$

d'où

$$u = C \sin . x\sqrt{n} + C_1 \cos . x\sqrt{n},$$

et, par suite,

$$y = \frac{C \sin . x\sqrt{n} + C_1 \cos . x\sqrt{n}}{x}.$$

93. Il est un autre cas particulier qui exige un artifice analogue à celui que nous avons plusieurs fois employé

dans certains cas de racines égales : c'est celui où l'on a $m = 1$; les deux parties de la formule (3) se réduisent à une seule, et l'on n'a plus qu'une intégrale particulière, bien que la valeur de m tombe entre les limites 0 et 2. On pourrait bien encore recourir à la formule (2); mais on obtiendra beaucoup plus simplement l'intégrale générale de la manière suivante :

Remplaçons m par $1 + \delta$ dans la seconde partie de y, dans la formule (3); elle devient

$$B_1 x^{-\delta} \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)(\sin\omega)^{-\delta} d\omega;$$

or

$$x^{-\delta} = 1 - \delta\,\mathrm{l}.x + \frac{\delta^2}{1.2}\,l^2 x - \ldots,$$

$$(\sin\omega)^{-\delta} = 1 - \delta\,\mathrm{l}.\sin\omega + \frac{\delta^2}{1.2}\,l^2\sin\omega - \ldots;$$

d'où

$$x^{-\delta}(\sin\omega)^{-\delta} = 1 - \delta(\mathrm{l}.x + \mathrm{l}.\sin\omega) + \ldots;$$

et la seconde partie de la valeur de y devient, en négligeant les puissances de δ supérieures à la première,

$$B_1 \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\, d\omega$$

$$- B_1\delta \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)(\mathrm{l}.x + \mathrm{l}.\sin\omega)\, d\omega;$$

la première partie de y devient de même

$$B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\, d\omega + B\delta\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\,\mathrm{l}.\sin\omega d\omega.$$

Ajoutons ces deux expressions et posons $B + B_1 = C$,

C désignant une constante arbitraire, on aura

$$y = C\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)d\omega$$
$$+ (B - C)\delta\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)(\mathrm{l}.\, x + \mathrm{l}.\sin\omega)\, d\omega$$
$$+ B\delta\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\mathrm{l}.\sin\omega d\omega.$$

Supposons maintenant que δ tende vers zéro, et $B\delta$ vers une constante arbitraire C_1; on aura pour la valeur complète de y, en passant à la limite, et observant que $\mathrm{l}.x + 2\,\mathrm{l}.\sin\omega = \mathrm{l}.\,(x\sin^2\omega)$,

$$y = C\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\, d\omega$$
$$+ C_1\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\,\mathrm{l}.(x\sin^2\omega)\, d\omega.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation

(6) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

94. Il est bon de remarquer que toutes les fois que m sera un nombre pair positif ou négatif, l'une des deux parties de la valeur de y donnée par l'équation (3) pourra s'exprimer sans aucun signe d'intégration; quant à l'autre, elle disparaîtra, vu que m sera en dehors des limites 0 et 2. Pour le démontrer, désignons, en général, par A_p l'intégrale définie $\int_0^\pi \cos(\lambda\cos\omega)\sin^p\omega d\omega$; l'intégration par parties donne la relation suivante, en supposant $p > 3$:

$$A_p = \frac{(p-1)(p-2)}{\lambda^2}A_{p-2} - \frac{(p-1)(p-3)}{\lambda^2}A_{p-4}.$$

Si p est un nombre pair, on parviendra, au moyen de

cette formule de réduction, à A_0 ou $\int_0^\pi \cos(\lambda\cos\omega)\,d\omega$, qui ne peut être obtenu exactement en fonction de λ. Si, au contraire, p est impair, A_p est ramené à A_3 et A_1 qui peuvent être calculés exactement et ont pour valeurs respectives

$$A_1 = \frac{2\sin\lambda}{\lambda}, \quad A_3 = \frac{4}{\lambda_3}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda);$$

d'où il résulte que l'une des deux intégrales particulières qui entrent dans l'équation (3) pourra toujours être exprimée en x, sous forme finie, lorsque m sera un nombre impair positif ou négatif.

95. On peut encore présenter l'intégrale de l'équation (1) sous une forme qui est souvent préférable à celles que nous avons considérées jusqu'ici, et particulièrement lorsque m est un nombre pair positif ou négatif.

Posons

$$y = Ax^\alpha\varphi(x) + A_1x^{\alpha+1}\varphi'x + A_2x^{\alpha+2}\varphi''(x) + \ldots,$$

les constantes α, A, A_1, A_2, etc., étant indéterminées, ainsi que la fonction $\varphi(x)$, dont nous désignons les dérivées successives par $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, etc. Substituons cette valeur de y dans l'équation (1), et cherchons s'il est possible d'annuler les coefficients des diverses puissances de x, qui seront en évidence.

En différentiant deux fois de suite y, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{m}{x}\frac{dy}{dx} &= mA\alpha x^{\alpha-2}\varphi(x) + mA_1(\alpha+1)x^{\alpha-1}\varphi'(x) + mA_2(\alpha+2)x^\alpha\varphi''(x) + \ldots \\ &\quad + mAx^{\alpha-1}\varphi'(x) \qquad\qquad + mA_1x^\alpha\varphi''(x) + \ldots, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\varphi(x) + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x) + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha\varphi''(x) + \ldots \\ &\quad + 2A\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x) + 2A_1(\alpha+1)x^\alpha\varphi''(x) + \ldots \\ &\quad + Ax^\alpha\varphi''(x) + \ldots\end{aligned}$$

Si nous substituons ces développements dans l'équation (1), et que nous égalions à zéro le coefficient du terme général qui contient $x^{\alpha+p-2}$, nous trouverons

$$[(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p+(2\alpha+2p+m-2)A_{p-1}+A_{p-2}]\varphi^p(x) + nA_{p-2}\varphi^{p-2}(x)=0;$$

et pour que cette relation entre $\varphi^p(x)$ et $\varphi^{p-2}(x)$ soit plus simple et ne dépende pas de p, nous poserons

$$(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p+(2\alpha+2p+m-2)A_{p-1}=0;$$

d'où il résultera

$$\varphi^p(x)+n\varphi^{p-2}(x)=0,$$

équation à laquelle on satisfera, quel que soit le nombre entier p, en posant

$$\varphi''(x)+n\varphi(x)=0,$$

d'où l'on conclut

$$\varphi(x)=C\sin x\sqrt{n}+C'\cos x\sqrt{n},$$

C et C′ étant des constantes arbitraires. Mais ce calcul ne s'applique pas à tous les termes de la série qui résulte de la substitution de la valeur de y dans l'équation (1); il suppose que p soit au moins égal à 2, et il est nécessaire de considérer à part les deux termes qui renferment les puissances $\alpha-1$ et $\alpha-2$ de x. En égalant à zéro leurs coefficients respectifs, on obtient

$$\alpha(\alpha-1)+m\alpha=0,\quad A_1(\alpha+1)(\alpha+m)+A(m+2\alpha)=0.$$

La première donne

$$\alpha=0,\quad \text{ou}\quad \alpha=1-m,$$

et la seconde conduit, dans l'un et l'autre cas, à l'équation

$$A_1=-A.$$

Examinons successivement les développements correspondants à ces deux valeurs de α.

1°. Soit $\alpha = 1 - m$; la relation générale entre A_p et A_{p-1} devient

$$p(p - m + 1)A_p = (m - 2p)A_{p-1}.$$

En changeant successivement p en $p - 1$, $p - 2$, etc., on déterminera A_p en fonction de A_1; et comme $A_1 = -A$, on connaîtra le coefficient général A_p en fonction de A qui restera indéterminé, mais que l'on pourra prendre égal à l'unité, à cause des constantes C, C'.

On trouvera ainsi

$$A_p = -\frac{(m - 2p)(m - 2p + 2)\ldots(m - 4)}{(p - m + 1)(p - m)\ldots(3 - m)} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p},$$

et la valeur de y aura pour expression

$$y = x^{1-m}\left\{\begin{array}{l} C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n} - x\dfrac{d(C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n})}{dx} + \ldots \\ + \dfrac{(m-4)\ldots(m-2p)}{(m-3)\ldots(m-p+1)}\dfrac{(-x)^p}{1.2\ldots p}\dfrac{d^p(C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n})}{dx^p} \end{array}\right\}.$$

Lorsque l'on trouvera pour un certain coefficient A_p une valeur égale à zéro, la série arrêtée au terme précédent satisfera à l'équation différentielle, et l'*intégrale générale sera donnée par un nombre fini de termes.* Cela arrivera toutes les fois que m sera un nombre pair positif.

2°. Soit maintenant $\alpha = 0$; la relation entre A_{p-1} et A_p devient

$$p(p + m - 1)A_p = -\frac{m + 2p - 2}{p(m + p - 1)};$$

d'où l'on tire, en supposant encore $A = 1$,

$$A_p = \frac{(m + 2)(m + 4)\ldots(m + 2p - 2)}{(m + 1)(m + 2)\ldots(m + p - 1)} \cdot \frac{(-1)^p}{1.2\ldots p};$$

et la valeur de y sera

$$y = \mathrm{C}\sin x\sqrt{n} + \mathrm{C}'\cos x\sqrt{n} - x\frac{d(\mathrm{C}\sin x\sqrt{n} + \mathrm{C}'\cos x\sqrt{n})}{dx} + \ldots$$
$$+ \frac{(-x)^p}{1.2\ldots p}\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2p-2)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}\frac{d^p(\mathrm{C}\sin x\sqrt{n}+\mathrm{C}'\cos x\sqrt{n})}{dx^p} + \ldots.$$

On arrêtera cette série, comme la précédente, au terme dont le coefficient sera nul; ce qui arrivera si m est un nombre pair négatif. D'où l'on tire cette conséquence importante, que l'*intégrale générale de l'équation* (1) *peut toujours s'exprimer par un nombre fini de termes lorsque m est un nombre pair positif ou négatif.*

96. *Équation de Riccati.* — L'équation non linéaire que l'on désigne ainsi est la suivante :

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m.$$

Si l'on pose, avec Euler, $y = \dfrac{\frac{du}{dx}}{au}$, on obtient, en faisant $ab = \mathrm{A}$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \mathrm{A}x^m u,$$

et tout se réduit à intégrer cette équation linéaire du second ordre : car la valeur générale de u sera de la forme

$$u = \mathrm{C}u_1 + \mathrm{C}'u_2,$$

C et C′ étant des constantes arbitraires ; il en résultera

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{C}\frac{du_1}{dx} + \mathrm{C}'\frac{du_2}{dx},$$

et, par suite,

$$y = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{C}\frac{du_1}{dx} + \mathrm{C}'\frac{du_2}{dx}}{\mathrm{C}u_1 + \mathrm{C}'u_2} = \frac{1}{a}\frac{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'}\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx}}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'}u_1 + u_2}.$$

Cette valeur de y renfermant une constante arbitraire $\frac{C}{C'}$ sera l'intégrale générale de la proposée.

Il reste donc à intégrer l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Ax^m u.$$

On peut ramener cette équation à une autre de la forme de l'équation (1), en changeant la variable indépendante x, et posant $x^p = kz$, k et p étant des constantes indéterminées. On trouve ainsi

$$\frac{p^2}{k^2} x^{2p-2} \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{p(p-1)}{k} x^{p-2} \frac{du}{dz} - Ax^m u = 0.$$

Les deux termes extrêmes ne renfermeront plus x si l'on pose $2p - 2 = m$, d'où $p = \frac{m}{2} + 1$, et qu'on divise par x^m. Si l'on divise, en outre, par $\frac{p^2}{k^2}$, et qu'on exprime x en z, on obtiendra

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - \frac{Ak^2}{\left(\frac{m}{2} + 1\right)^2} u = 0;$$

et si, pour simplifier cette équation, on détermine k par la condition

$$Ak^2 = \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{\frac{m}{2} + 1}{\sqrt{A}},$$

on aura à intégrer l'équation suivante :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\left(\frac{m}{m+2}\right)}{z} \cdot \frac{du}{dz} - u = 0,$$

qui rentre dans l'équation (1) en y changeant m et n en

$\frac{m}{m+2}$ et -1 ; ce qui donne lieu aux conséquences suivantes :

1°. Si $\frac{m}{m+2}$ est un nombre pair positif ou négatif, les deux valeurs de u pourront s'exprimer par un nombre fini de termes en z, et, par suite, en x.

Soit donc

$$\frac{m}{m+2} = \pm 2i,$$

i étant un nombre entier positif; on en tire

$$m = \frac{\mp 4i}{\pm 2i - 1},$$

les signes supérieurs se correspondant, ainsi que les inférieurs. Cette expression se réduit à la forme suivante :

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1}.$$

Ainsi l'équation de Riccati pourra s'intégrer complétement lorsque m sera renfermé dans cette formule.

2°. Si $\frac{m}{m+2}$ est compris entre 0 et 2, la valeur générale de u pourra s'exprimer au moyen de la formule (3). On voit d'abord que si m est positif, $\frac{m}{m+2}$ est nécessairement compris entre 0 et 2, et l'équation de Riccati s'intégrera par le moyen de deux intégrales définies simples.

Si m est négatif, soit $m = -m'$, on aura

$$\frac{m'}{m'-2} > 0, \quad \frac{m'}{m'-2} < 2 :$$

la première exige $m' > 2$, et la seconde, $m' > 4$. Donc on intégrera encore de la même manière l'équation de Riccati lorsque m sera compris entre -4 et $-\infty$. Ce

n'est donc que pour les valeurs de m comprises entre o et -4, que l'intégrale cherchée ne pourra s'exprimer au moyen de deux intégrales définies simples.

La formule (3) devient, en y changeant m en $\frac{m}{m+2}$ et n en -1,

$$u = B\int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1}\cos\omega)\sin^{\frac{-2}{m+2}}\omega d\omega$$

$$+ B_1 z^{\frac{2}{m+2}}\int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1}\cos\omega)\sin^{\frac{2}{m+2}}\omega d\omega.$$

Remplaçant z par sa valeur $\frac{2\sqrt{A}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}$, et posant $\frac{2\sqrt{A}}{m+2} = \mu$, il vient

$$u = B\int_0^\pi \cos\left(\mu x^{\frac{m}{2}+1}\sqrt{-1}\cos\omega\right)\sin^{\frac{-2}{m+2}}\omega d\omega$$

$$+ B'x\int_0^\pi \cos\left(\mu x^{\frac{m}{2}+1}\sqrt{-1}\cos\omega\right)\sin^{\frac{2}{m+2}}\omega d\omega.$$

Si l'on fait disparaître les imaginaires, cette formule devient

$$u = B\int_0^\pi \left(e^{\mu x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega} + e^{-\mu x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega}\right)\sin^{\frac{-2}{m+2}}\omega d\omega$$

$$+ B'x\int_0^\pi \left(e^{\mu x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega} + e^{-\mu x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega}\right)\sin^{\frac{2}{m+2}}\omega d\omega,$$

B et B′ étant deux constantes arbitraires; et le rapport $\frac{B}{B'}$ sera la seule constante que renfermera l'intégrale de l'équation de Riccati.

Si m est entre les limites o et -4, une seule des deux

intégrales définies subsiste, et l'intégrale générale sera donnée au moyen de la formule (2). Soit u_1 la valeur particulière de u, on trouvera

$$y = \frac{\frac{du_1}{dx}}{au_1} + \frac{1}{\left(u_1^2 C_1 + a\int \frac{dx}{u_1^2}\right)},$$

C étant une constante arbitraire. Cette expression est moins simple que la précédente, mais c'est précisément dans ce même intervalle, entre o et -4, que se trouvent comprises les valeurs renfermées dans la formule $\frac{-4i}{2i \pm 1}$, et pour lesquelles on peut intégrer exactement. Si m avait pour valeur la première limite o, l'équation à intégrer serait

$$\frac{d^2u}{dz^2} - u = 0,$$

qui donne

$$u = Ce^z + C_1e^{-z}.$$

Si m a pour valeur la seconde limite -4, on a à considérer l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{du}{dz} - u = 0,$$

qui a déjà été traitée, et qui, en posant $u = \frac{v}{z}$, se réduit à

$$\frac{d^2v}{dz^2} - v = 0,$$

d'où l'on tire

$$v = Ce^z + C_1e^{-z},$$

et, par suite,

$$u = \frac{Ce^z + C_1e^{-z}}{z}.$$

4°. Entre les limites o et -4, il y a une valeur qui

rend les deux intégrales illusoires : c'est $m = -2$. Dans ce cas, l'équation primitive en u devient $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Au}{x^2}$; elle rentre dans une classe d'équations que nous avons donné le moyen d'intégrer. Son intégrale générale sera $u = Cx^{k'} + C_1 x^{k''}$, k' et k'' étant les racines de l'équation $k^2 - k - A = 0$.

97. Soit encore l'équation non linéaire

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = be^{px};$$

posons de même

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx},$$

et l'équation proposée deviendra

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abue^{px}.$$

Soit

$$\frac{2\sqrt{ab}}{p} e^{\frac{1}{2}px} = z,$$

il en résultera

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} - u = 0,$$

ce qui n'est qu'un cas particulier de l'équation (1). On aura donc

$$u = C\int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1}\cos\omega)\,d\omega$$
$$+ C_1\int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1}\cos\omega)\,\mathrm{l}.(z\sin^2\omega)\,d\omega,$$

ou

$$u = C'\int_0^\pi \left(e^{z\cos\omega} + e^{-z\cos\omega}\right) d\omega$$
$$+ C''\int_0^\pi \left(e^{z\cos\omega} + e^{-z\cos\omega}\right) \mathrm{l}.(z\sin^2\omega)\,d\omega.$$

Il ne reste plus qu'à substituer à z sa valeur en x, et y se déduira de u, comme dans le cas de l'équation de Riccati.

98. Considérons encore l'équation suivante, qui se rencontre dans les applications physiques,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[p^2 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] y = 0;$$

posons $y = x^{n+1} z$, il viendra

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dz}{dx} + p^2 z = 0,$$

qui rentre dans l'équation (1), en y changeant m en $2(n+1)$ et n en p^2.

Si l'on suppose n positif, et quelconque d'ailleurs, $2(n+1)$ n'étant pas compris entre 0 et 2, on ne pourra exprimer qu'une intégrale particulière au moyen d'une intégrale définie. Son expression sera

$$z = A\int_0^\pi \cos(px\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega d\omega,$$

et l'on pourra, comme on l'a déjà vu, en déduire l'intégrale complète. La valeur de y, qui s'en déduit, est

$$y = Ax^{n+1}\int_0^\pi \cos(px\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega d\omega.$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, l'équation proposée devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(p^2 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0,$$

et l'on aura

$$y = Ax^2\int_0^\pi \cos(px\cos\omega)\sin^3\omega d\omega;$$

et, effectuant l'intégration,

$$y = B\left(\frac{\sin px}{px} - \cos px\right),$$

B étant une constante arbitraire. En la considérant comme fonction de x, on déterminera facilement l'intégrale complète.

Détermination des intégrales définies par l'intégration d'équations différentielles.

99. La recherche d'une intégrale définie peut quelquefois être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle, relative à l'une des constantes qui entrent sous le signe $\int$.

Les dérivées de cette intégrale par rapport à ces constantes seront des intégrales prises entre les mêmes limites, et si l'on peut par ces différentiations reproduire la première intégrale, en l'éliminant on aura une équation entre ses dérivées par rapport à une des constantes. Si l'on peut l'intégrer, on aura une expression qui renfermera l'intégrale définie comme cas particulier, et il ne s'agira plus que de déterminer les constantes arbitraires de manière qu'elle se réduise à cette intégrale elle-même.

100. Soit, par exemple, l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\, d\omega.$$

Considérons-la comme une fonction de x, et posons

$$(1) \qquad y = \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\, d\omega.$$

Différentiant deux fois par rapport à x, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\cos\omega d\omega,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\cos^2\omega d\omega.$$

Pour rendre ces expressions plus facilement comparables, il faut introduire $\cos(x\cos\omega)$ au lieu de $\sin(x\cos\omega)$ dans la seconde; et c'est ce que l'on fera en intégrant par parties. On aura ainsi

$$-\sin\omega\sin(x\cos\omega)-x\int\sin^2\omega\cos(x\cos\omega)\,d\omega.$$

Le premier terme disparaît, aux limites o et π, et il vient

$$\frac{dy}{dx}=-x\int_0^\pi\cos(x\cos\omega)\sin^2\omega d\omega.$$

Divisant par x et ajoutant à la troisième équation, on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=-\int_0^\pi\cos(x\cos\omega)\,d\omega.$$

L'intégrale cherchée étant ainsi reproduite, il suffira de la remplacer par y pour avoir l'équation différentielle cherchée, qui sera

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

101. La détermination de $\int_0^\pi\cos(x\cos\omega)\,d\omega$ a été ramenée à l'intégration de l'équation (2), que nous avons traitée dans le nº **87**. Mais, comme nous n'en avons développé qu'une intégrale particulière, on ne peut savoir si c'est elle qui doit donner la valeur de l'intégrale définie. On voit donc qu'il est, en général, nécessaire de connaître l'intégrale complète de l'équation différentielle à laquelle on est conduit, pour pouvoir en déduire la valeur de l'intégrale définie cherchée.

Cependant, dans le cas actuel, il est facile de s'assurer que la série trouvée pour intégrale de l'équation (2) coïn-

cide avec $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega$, en donnant une valeur convenable à la constante.

En effet, développant $\cos(x\cos\omega)$ en série, on a

$$\cos(x\cos\omega) = 1 - \frac{x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4}\cdots + \frac{x^{2m}\cos^{2m}\omega}{1.2\ldots 2m} + \ldots.$$

Multiplions par $d\omega$, et intégrons entre o et π, en observant que

$$\int_0^\pi \cos^{2m}\omega\,d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\pi,$$

il viendra

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega = \pi\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right).$$

Ainsi l'intégrale définie $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega$ n'est autre chose que l'intégrale particulière que nous avions trouvée pour l'équation (2), et dans laquelle on suppose la constante arbitraire égale à π.

102. Cherchons maintenant l'équation qui déterminerait l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx$, que nous connaissons déjà.

Soit

$$y = \int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx,$$

on trouvera

$$\frac{dy}{dn} = -\int_0^\infty 2xe^{-m^2x^2}\sin 2nx\,dx.$$

Or

$$\int 2xe^{-m^2x^2}\sin 2nx\,dx = \frac{-1}{m^2}e^{-m^2x^2}\sin 2nx$$
$$+ \frac{2n}{m^2}\int e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx.$$

Donc

$$\frac{dy}{dn} = -\frac{2ny}{m^2}, \quad \text{d'où} \quad y = Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Ainsi $\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx dx$ est compris dans l'expression $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$, dans laquelle C est indépendant de x et n : il reste à voir quelle valeur doit avoir C pour que $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$ devienne égal à cette intégrale définie. Or, pour $n = 0$, l'intégrale devient

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2} dx \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2m},$$

et $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$ se réduit à C ; donc la valeur de la constante C devait être $\frac{\sqrt{\pi}}{2m}$, et l'on a

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-\frac{n^2}{m^2}},$$

comme nous l'avions trouvée par une autre voie.

Si l'on avait regardé $\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx dx$ comme fonction de m, on aurait trouvé

$$\frac{dy}{dm} = \left(\frac{2n^2}{m^3} - \frac{1}{m}\right) y,$$

d'où

$$y = \frac{C}{m} e^{-\frac{n^2}{m^2}};$$

et l'on trouverait

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

103. Considérons, en dernier lieu, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos axdx}{1+x^2},$$

et posons

$$y=\int_0^l \frac{\cos axdx}{1+x^2}.$$

Nous ne prenons pas de suite la limite ∞, pour éviter une difficulté dont nous parlerons tout à l'heure. Différentiant deux fois par rapport à a, il vient

$$\frac{d^2y}{da^2}=-\int_0^l \frac{x^2\cos axdx}{1+x^2}=y-\int_0^l \cos axdx=y-\frac{\sin al}{a},$$

et si l'on faisait $l=\infty$, on voit que le second membre se présenterait sous une forme indéterminée.

Il faut maintenant intégrer l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{da^2}-y+\frac{\sin al}{a}=0.$$

Si l'on néglige d'abord le dernier terme, on trouvera pour intégrale $y=Ae^a+Be^{-a}$; considérant ensuite A et B comme des fonctions de a, on trouvera, pour l'intégrale générale de l'équation en question,

$$y=Ce^a+C_1e^{-a}+\frac{e^{-a}}{2}\int_0^a \frac{e^a\sin alda}{a}-\frac{e^a}{2}\int_0^a \frac{e^{-a}\sin al}{a}da,$$

C et C_1 étant des constantes arbitraires.

Il faut maintenant supposer que l croisse indéfiniment, et chercher la limite du second membre.

Or, quand l est extrêmement grand, $\sin al$ passe par toutes les valeurs de -1 à $+1$ pour un accroissement extrêmement petit de a, pour lequel on peut regarder les autres facteurs comme constants. Les éléments des intégrales se détruisent donc dans cet intervalle, et il en est de

même depuis une valeur finie quelconque de a jusqu'à l'infini. Il suffit donc de considérer les éléments de ces intégrales entre o et une valeur infiniment petite de a. Mais alors e^a et e^{-a} peuvent être remplacés par l'unité dans les intégrales qui se réduisent à $\frac{\pi}{2}$, et les deux derniers termes rentrent dans les premiers.

Ainsi la limite de l'intégrale $\int_0^l \frac{\cos ax dx}{1+x^2}$, ou $\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2}$ étant désignée par y, on a

$$y = Ce^a + C_1 e^{-a}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes C, C_1.

Or, si a est positif, Ce^a croîtra indéfiniment avec a, ce qui ne peut convenir; donc $C=0$. De plus $\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2}$ devient égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $a=0$; donc $C_1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Si a était négatif, on aurait $C_1 = 0$ et $C = \frac{\pi}{2}$, et, par suite,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^a.$$

104. Si l'on différentie les deux membres de cette équation par rapport à a, on aura

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax dx}{1+x^2} = \frac{-\pi}{2} e^a,$$

a étant négatif. Si l'on différentie l'équation qui se rapporte au cas de a positif, on aura

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Détermination des séries par l'intégration d'équations différentielles.

105. Nous avons vu comment l'intégrale d'une équation différentielle pouvait être développée en série; mais on peut réciproquement se proposer de trouver l'équation différentielle dont une série donnée serait l'intégrale. Si cette équation peut être intégrée complétement sous forme finie, on saura déterminer la fonction dont on avait le développement. Pour obtenir cette équation, on différentie une ou plusieurs fois la série, ou d'autres séries qu'on en déduit, de manière à reproduire celle que l'on cherche, qu'on peut alors éliminer. Si elle ne se reproduit pas, mais qu'on parvienne à une série qu'on sache sommer, on peut encore obtenir l'équation cherchée.

106. Soit, par exemple, la série

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6},$$

on trouvera, en différentiant deux fois,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots;$$

cette série étant, au signe près, celle que l'on cherche, on peut l'éliminer, et l'on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y.$$

Par la théorie des équations linéaires, on trouvera

$$y = A\cos x + B\sin x,$$

A et B étant des constantes à déterminer.

Pour cela on observera que la série conserve la même

valeur quand on change le signe de x; donc $B = 0$. De plus, elle se réduit à 1 pour $x = 0$; donc $A = 1$, et la série est égale à $\cos x$, comme on le savait d'ailleurs.

107. Soit encore la série

$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \ldots,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = -1 + 1.(1+x);$$

dans ce cas, on est arrivé à une série qui n'est pas identique avec la proposée, mais que l'on a pu sommer.

Il faut maintenant intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -1 + 1.(1+x), \quad \text{ou} \quad y = -x + \int dx\, 1.(1+x),$$

qui donne

$$y = C - 2x + (1+x)\,1.(1+x).$$

La constante C doit être égale à 1, puisque la série se réduit à 1 pour $x = 0$; donc

$$y = 1 - 2x + (1+x)\,1.(1+x).$$

On aurait pu différentier une fois de plus, et l'on aurait eu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x};$$

il aurait fallu alors intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{1+x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = 1.(1+x) + C.$$

Pour déterminer C, on observera que l'on a $\frac{dy}{dx} = -1$

pour $x = 0$; donc $C = -1$, et

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \text{l.}(1 + x).$$

On aurait continué comme dans le premier calcul.

108. Considérons, en dernier lieu, la série

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots;$$

elle donne d'abord

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2.4} - \frac{x^5}{2^2.4^2.6} + \ldots.$$

Pour faire disparaître le dernier facteur de chaque dénominateur, multiplions les deux membres par x, puis différentions-les, il viendra

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -x + \frac{x^3}{2^2} - \frac{x^5}{2^2.4^2} + \frac{x^7}{2^2.4^2.6^2}$$
$$= -x\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right).$$

On a reproduit ainsi la série proposée, et, en l'éliminant, on obtient

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Et, en effet, nous avons reconnu précédemment que cette équation différentielle a pour intégrale particulière la série proposée; mais nous ferons observer ici, comme nous l'avons fait pour la détermination des intégrales définies, qu'il est, en général, nécessaire de connaître l'intégrale complète de l'équation différentielle à laquelle on parvient.

Application des équations différentielles à la recherche de fonctions dont on connaît certaines propriétés caractéristiques.

109. Soit proposé de trouver une fonction $z = \varphi(x)$, telle que l'on ait, pour toute valeur de x et y,

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y). \tag{1}$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à x, en considérant y comme constant, on a

$$\varphi'(x) = \varphi'(x + y);$$

d'où l'on conclut que $\varphi'(x)$ est constant, quel que soit x, et que, par conséquent, on a

$$\frac{dz}{dx} = a,$$

a désignant une constante. On en déduit

$$z = ax + b, \tag{2}$$

b étant une nouvelle constante.

La fonction φ, qui satisfait à l'équation (1), est donc nécessairement comprise dans celles que représente la formule (2). Mais la réciproque n'est pas sûre, et il faut tâcher de déterminer les constantes a et b de manière que la substitution de la valeur trouvée de z rende l'équation (1) identique. On trouve pour résultat de cette substitution

$$ax + b + ay + b = a(x + y) + b,$$

ce qui exige que l'on ait $b = 0$, d'où résulte $z = ax$.

La solution la plus générale de la question est donc

donnée par la formule

$$\varphi(x) = ax,$$

a étant une constante arbitraire.

110. Cherchons maintenant la fonction déterminée par la condition générale

$$(1) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy).$$

Différentiant par rapport à x, il vient

$$\varphi'(x) = y\varphi'(xy).$$

Différentiant la même équation (1) par rapport à y, on obtient

$$\varphi'(y) = x\varphi'(xy).$$

De ces deux dernières on tire

$$x\varphi'(x) = y\varphi'(y);$$

donc le produit $x\varphi'(x)$ est constant, et si l'on pose $\varphi(x) = z$, on aura, en désignant par a une constante, $x\frac{dz}{dx} = a$, d'où l'on tire

$$dz = \frac{adx}{x}, \quad z = a\,\text{l}.\,x + b,$$

b étant une nouvelle constante. Substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(2) \qquad a\,\text{l}.\,x + b + a\,\text{l}.\,y + b = a\,\text{l}.\,xy + b;$$

donc

$$b = 0 \quad \text{et} \quad z = a\,\text{l}.\,x,$$

a étant arbitraire.

Ainsi, la solution la plus générale de la question est donnée par la formule

$$\varphi(x) = \log x,$$

la base du système de logarithmes étant arbitraire.

111. Proposons-nous maintenant de trouver la fonction $\varphi(x)$ d'après la condition

(1) $$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

En différentiant cette équation par rapport à x et y, on obtient les deux suivantes :

$$\varphi'(x)\varphi(y) = \varphi'(x+y),$$
$$\varphi(x)\varphi'(y) = \varphi'(x+y);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = a,$$

a étant une constante. Si donc on pose $\varphi(x) = z$, on aura

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx} = a,$$

d'où

$$\frac{dz}{z} = adx, \quad \mathrm{l}.\frac{z}{b} = ax, \quad z = be^{ax},$$

b étant constant. Substituant dans l'équation (1), on obtient

(2) $$be^{ax}.be^{ay} = be^{a(x+y)},$$

ce qui exige que l'on ait $b^2 = b$, et, par suite, $b = 1$, car on ne saurait prendre $b = 0$. La fonction cherchée a donc pour expression

$$\varphi(x) = e^{ax},$$

a étant arbitraire.

Si la constante a est imaginaire, et de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$, on aura

$$\varphi(x) = e^{mx}(\cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx).$$

112. Soit encore proposée la condition

(1) $$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy).$$

Différentiant cette équation par rapport à x et y, on obtient

$$\varphi'(x)\,\varphi(y) = y\varphi'(xy),$$
$$\varphi(x)\,\varphi'(y) = x\varphi'(xy).$$

Ces deux équations donnent

$$x\varphi'(x)\,\varphi(y) = y\varphi'(y)\,\varphi(x),$$

d'où

$$\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = a,$$

a étant une constante. On a donc, en faisant $\varphi(x) = z$,

$$\frac{x}{z}\frac{dz}{dx} = a;$$

on en déduit

$$\frac{dz}{z} = a\frac{dx}{x}, \quad \mathrm{l.}\,\frac{z}{b} = a\,\mathrm{l.}\,x = \mathrm{l.}\,x^a,$$

b étant une constante. On aura donc

$$z = bx^a.$$

Substituant dans l'équation (1), il vient

$$bx^a . by^a = bx^a y^a; \tag{2}$$

donc $b = 1$, et la fonction cherchée a pour expression

$$\varphi(x) = x^a,$$

a étant une constante arbitraire.

Si l'on suppose $a = m \pm n\sqrt{-1}$, la fonction prend la forme

$$\varphi(x) = x^m(\cos. n\,\mathrm{l.}\,x \pm \sqrt{-1}\,\sin. n\,\mathrm{l.}\,x).$$

113. Nous donnerons pour dernier exemple de ce genre de questions celle qui se rapporte à la détermination de la résultante de deux forces égales, faisant entre elles un angle quelconque.

On est conduit dans cette recherche par des considérations fort simples, que nous n'indiquerons pas ici, à l'équation suivante :

$$(1) \qquad \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=\varphi(x)\,\varphi(y).$$

x désigne le demi-angle des deux forces, et $\varphi(x)$ le rapport de la résultante à l'une d'elles. Or, si l'angle des forces est nul, la résultante est égale à leur somme; et s'il est égal à deux angles droits, elle est nulle : on devra donc avoir les conditions particulières suivantes, en désignant $\varphi(x)$ par z :

$$(2) \qquad \begin{cases} z=2 \quad \text{pour} \quad x=0, \\ z=0 \quad \text{pour} \quad x=\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

et, de plus, z ne peut devenir nul pour aucune valeur de x comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On observera d'ailleurs que la question de statique n'impose aucune condition à la fonction, pour des valeurs de x non comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et pour des valeurs de y plus grandes que x. On peut reconnaître facilement que la première des équations (2) est une conséquence immédiate de l'équation (1); car, si l'on y fait $y=0$, on trouve

$$2\varphi(x)=\varphi(x)\cdot\varphi(0),$$

d'où résulte $\varphi(0)=2$.

Cela posé, en différentiant deux fois l'équation (1) par rapport à x, et deux fois par rapport à y, on obtient

$$\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)=\varphi''(x)\,\varphi(y),$$
$$\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)=\varphi(x)\,\varphi''(y);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)}=a,$$

a étant une constante réelle, puisque $\varphi(x)$ et $\varphi''(x)$ le sont.

Cette équation devient, en remplaçant $\varphi(x)$ par z,

$$\frac{d^2z}{dx^2} - az = 0. \tag{3}$$

L'intégrale de cette équation aura une forme différente, suivant que l'on aura $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.

1°. Soit d'abord $a = 0$, il en résulte

$$z = Cx + C_1,$$

et, substituant dans l'équation (1), on devrait avoir, pour une infinité de valeurs de x et y,

$$2Cx + 2C_1 = C^2xy + CC_1y + CC_1x + C_1^2;$$

les termes semblables devraient donc être égaux de part et d'autre, d'où résulterait $C = 0$, et $\varphi(x)$ serait égal à une constante, ce qui est impossible; donc on ne peut avoir $a = 0$.

2°. Soit $a > 0$, l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$z = Ce^{x\sqrt{a}} + C_1e^{-x\sqrt{a}};$$

substituant dans l'équation (1), et posant

$$e^{(x+y)\sqrt{a}} = u, \quad e^{(x-y)\sqrt{a}} = v,$$

ce qui n'établit aucune liaison entre u et v, on trouve

$$C(C-1)u + C_1(C_1-1)u^{-1} = C(1-C_1)v + C_1(1-C)v^{-1}.$$

Les coefficients des termes dissemblables devant être nuls séparément, on aura

$$C = 0, \qquad C_1 = 0,$$

ou

$$C = 1, \quad C_1 = 1.$$

Or on ne peut avoir à la fois $C = 0$, $C_1 = 0$, sans quoi l'on aurait $z = 0$, quel que fût x, ce qui est absurde. Donc on ne peut prendre que les valeurs suivantes :

$$C = 1, \quad C_1 = 1,$$

d'où il suivrait

$$z = e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}},$$

expression qui ne deviendrait pas nulle pour $x = \frac{\pi}{2}$, et qui, par conséquent, ne satisfait pas à la question. Donc on ne peut avoir $a > 0$.

3°. Supposons enfin $a < 0$ et posons $a = -m^2$; l'intégrale complète de l'équation (3) sera

$$z = C\cos mx + C_1 \sin mx,$$

et puisque l'on doit avoir $z = 2$ pour $x = 0$, il en résulte $C = 2$, et la valeur de z sera

$$z = 2\cos mx + C_1 \sin mx;$$

en la substituant dans l'équation (1), et réduisant, on trouve

$$C_1^2 \sin mx \sin my + 2C_1 \sin my \cos mx = 0,$$

et comme on ne saurait avoir $m = 0$, on peut supprimer le facteur $\sin my$, et il reste

$$C_1^2 \sin mx + 2C_1 \cos mx = 0,$$

équation qui ne peut être satisfaite quel que soit x, qu'en posant $C_1 = 0$, d'où résulte

$$z = 2\cos mx.$$

La constante m se déterminera au moyen de la seconde

équation (2), qui donnera

$$\cos\frac{m\pi}{2} = 0,$$

d'où $m = 2n + 1$, n étant un nombre entier quelconque. Mais si l'on n'avait pas $n = 0$, $\cos mx$ deviendrait nul, pour la valeur $x = \frac{\pi}{2(2n+1)}$, qui est moindre que $\frac{\pi}{2}$; ce qui ne saurait être, puisque la fonction z ne peut devenir nulle pour aucune valeur de x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Donc enfin

$$z = 2\cos x,$$

et la valeur de la fonction cherchée est

$$\varphi(x) = 2\cos x.$$

DIGRESSION SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS, OU USAGES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Intégrales eulériennes.

114. Legendre a désigné de cette manière deux espèces d'intégrales définies, étudiées avec beaucoup de soin, d'abord par Euler, et ensuite par Legendre lui-même : nous nous bornerons à en faire connaître les principales propriétés. Celles de la première espèce sont comprises dans la formule

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx;$$

celles de la seconde sont de la forme

$$\int_0^1 \left(\text{l.}\,\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,$$

a étant positif, sans quoi l'intégrale serait infinie.

Si l'on pose $\mathrm{l}.\frac{1}{x}=y$, on lui donne la forme

$$\int_0^{\infty} y^{a-1}e^{-y}dy.$$

Legendre désigne les premières par le symbole (p, q), et les secondes par $\Gamma(a)$; de sorte que l'on a

$$(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Nous avons déjà eu occasion de parler de ces dernières dans le cours de première année, et nous avons démontré que si a est entier, on a $\Gamma(a)=1.2.3\ldots(a-1)$; et que, quelque valeur positive qu'ait m, on a

$$\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-mx}dx=\frac{\Gamma(a)}{m^a}.$$

115. On reconnaît immédiatement une propriété très-simple des intégrales de première espèce, et qui consiste en ce que leur valeur ne change pas, quand on change l'une dans l'autre les deux lettres p et q. En effet, si l'on fait la somme des deux éléments de l'intégrale, correspondants à deux valeurs de x dont la somme soit égale à 1, elle reste évidemment la même quand on change p en q, et réciproquement, puisque cela ne fait que changer les deux éléments l'un dans l'autre. Donc l'intégrale entre les limites 0 et 1 reste la même quand on change l'une dans l'autre les deux lettres p et q; propriété qui s'exprimera de la manière suivante :

$$(p, q)=(q, p).$$

116. Démontrons maintenant une des principales pro-

priétés des fonctions de seconde espèce, dont l'étude doit être faite en même temps que celle des premières.

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1);$$

l'intégration par parties donne

$$\int \left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^a dx = x\left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^a + a\int \left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,$$

et, prenant les limites o et 1,

$$\int_0^1 \left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^a dx = a\int_0^1 \left(\mathrm{l}.\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,$$

ce qui donne la relation suivante :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Au moyen de cette relation, il suffira de connaître la fonction $\Gamma(a)$ pour toutes les valeurs de a comprises entre o et 1, pour en déduire celles qui se rapportent aux valeurs de a comprises entre 1 et 2. De celles-ci on passera aux valeurs de a, comprises entre 2 et 3, et ainsi de suite indéfiniment.

La construction d'une Table qui donnerait toutes les valeurs possibles de la fonction Γ se réduit donc à la considération des valeurs de a comprises entre o et 1.

Nous allons voir qu'il suffit même de connaître les valeurs de $\Gamma(a)$ dans l'intervalle de $a = 0$ à $a = \frac{1}{2}$.

D'après ce qui a été dit précédemment, on a l'équation

$$\int_0^\infty z^{b-1} e^{-z(1+x)} dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

b étant positif. Multiplions les deux membres par $x^{a-1}dx$, a étant positif et plus petit que b, et intégrons-les par rap-

port à x entre o et l'infini, nous aurons

$$\int_0^\infty \int_0^\infty z^{b-1} x^{a-1} e^{-z} e^{-zx} dz dx = \Gamma b \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^b} dx;$$

intégrons d'abord par rapport à x, et observons que

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-zx} dx = \frac{\Gamma a}{z^a};$$

le premier membre de l'équation deviendra

$$\Gamma(a) \int_0^\infty z^{b-a-1} e^{-z} dz, \quad \text{ou} \quad \Gamma(a)\Gamma(b-a),$$

ce qui donne l'équation

$$\Gamma(a)\Gamma(b-a) = \Gamma(b) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

On voit donc comment les intégrales de la forme $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b}$, dans lesquelles on a $a < b$, dépendent de celles que nous avons désignées par Γ.

Considérons le cas particulier de $b = 1$, et rappelons-nous que $\Gamma(1) = 1$, et $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, l'équation précédente deviendra

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Si donc on connaissait les valeurs de $\Gamma(a)$ depuis $a=0$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$, cette équation donnant $\Gamma(1-a)$, d'après $\Gamma(a)$, ferait connaître les valeurs de la fonction depuis

$a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = 1$. Il serait très-facile ensuite, comme nous l'avons fait voir, de déterminer ses valeurs depuis $a = 1$. jusqu'à $a = \infty$.

On peut remarquer que si dans l'équation précédente on fait $a = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2 = \pi; \quad \text{d'où} \quad \Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi};$$

ainsi

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}.$$

Posant $x = y^2$, il vient

$$2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}, \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi},$$

comme nous l'avions trouvé déjà par d'autres procédés.

117. Les intégrales de première espèce peuvent se ramener à celles de seconde; ce qui est avantageux en ce que celles-ci ne dépendent que d'une seule variable a, tandis que les autres dépendent de deux variables p et q.

L'intégrale $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ devient, en posant $x = \frac{y}{1+y}$,

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{(1+y)^{p+q}},$$

dont la valeur est, d'après une formule du numéro précédent,

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

on a donc l'équation suivante:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

ou

$$(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

formule très-simple qui servira à exprimer les fonctions de première espèce, au moyen des fonctions Γ.

118. Si l'on multiplie membre à membre les deux équations

$$(p, q) = \frac{\Gamma(p\,\Gamma q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$(p+q, r) = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)},$$

il vient

$$(p, q)(p+q, r) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)},$$

et comme le second membre ne change pas, quand on change l'une dans l'autre deux quelconques des lettres p, q, r, il en sera de même du premier membre, et l'on aura

$$(p, q)(p+q, r) = (p, r)(p+r, q) = (r, q)(q+r, p),$$

ce qui est une des propriétés fondamentales des fonctions (p, q).

119. Supposons maintenant que les deux nombres p et q soient égaux dans la fonction (p, q); on aura alors

$$(a, a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx:$$

posons $x = \frac{1}{2}(1+y)$, il viendra

$$(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{a-1}dy = \frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^1 (1-y^2)^{a-1}dy;$$

faisons ensuite $y^2 = z$, d'où $dy = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$, on obtiendra

$$(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{a-1}dz = \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\frac{1}{2}, a\right),$$

ou, en remplaçant les fonctions (p, q) par leurs valeurs au moyen des fonctions Γ,

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a)}{2^{2a-1}\Gamma(\frac{1}{2}+a)},$$

d'où l'on tire, en observant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$,

$$2^{1-2a}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2a) = \Gamma(a)\Gamma(\tfrac{1}{2}+a),$$

ce qui constitue une nouvelle propriété générale des fonctions Γ.

Nous bornerons là ce que nous avions à dire des intégrales eulériennes, et nous renverrons pour plus de détails aux *Exercices de Calcul intégral* de Legendre.

Expression des fonctions d'une seule variable, par des intégrales définies doubles.

120. Fourier a fait connaître une formule d'une grande importance dans les applications de l'analyse à la physique. Elle a pour objet de représenter par une intégrale définie double une fonction de x donnée depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, et qui n'est assujettie d'ailleurs à aucune condition de continuité. Elle peut changer de forme d'une manière arbitraire, et représenter un lieu géométrique composé d'arcs de courbes aussi diverses que l'on voudra; ce lieu pourra, par exemple, se confondre avec l'axe des x, depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, excepté dans une étendue limitée où il se composera d'arcs de courbes arbitraires. La seule condition à laquelle la fonction soit assujettie consiste en ce qu'elle n'ait qu'une seule valeur pour chacune des valeurs de x.

Sans entrer ici dans aucun détail sur la manière dont Fourier a découvert cette formule, nous nous bornerons d'abord à en démontrer l'exactitude.

Soit $F(x)$ une fonction de x, entièrement arbitraire; je dis qu'on aura identiquement

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,dp\,d\alpha.$$

En effet, intégrons d'abord, par rapport à p, depuis o jusqu'à une valeur très-grande p; en doublant les résultats, nous produirons le même effet que si nous avions intégré de $-p$ à $+p$. Nous aurons à intégrer, par suite, $F(\alpha)\dfrac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$ entre $-\infty$ et $+\infty$, puis à faire croître p indéfiniment.

Or, si l'on considère une valeur de α qui diffère de x d'une quantité finie, on peut supposer p assez grand pour que $p(x-\alpha)$ croisse de 2π quand α croîtra d'une quantité aussi petite qu'on le voudra, et qui aura pour valeur $\dfrac{2\pi}{p}$; dans cet intervalle, $\dfrac{F(\alpha)}{x-\alpha}$ ne variera pas sensiblement, et comme l'intégrale $\int \sin p(x-\alpha)\,d\alpha$ sera nulle entre ces deux limites, on pourra considérer aussi $\int F(\alpha)\dfrac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$ comme nulle dans ce même intervalle : d'où il suit qu'on peut se borner à considérer les valeurs de α qui diffèrent infiniment peu de x, et il est évident que les conséquences précédentes ne s'appliquent pas à ces valeurs, puisque $\dfrac{F(\alpha)}{x-\alpha}$ peut varier considérablement lorsque α subit de très-petites variations. Soit donc $\alpha = x+\omega$, ω étant une quantité infiniment petite, positive ou négative, puisque α peut être plus grand ou plus petit que x; si $F(\alpha)$ ne varie pas brusquement à partir de la valeur x, on pourra substituer $F(x)$ à $F(x+\omega)$, et $\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\dfrac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$ se ré-

duira à $F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$, ε étant une quantité infiniment petite. Mais l'intégrale $\int\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$ étant nulle, comme nous l'avons démontré, lorsque ω est fini, et que l'on prend deux limites qui diffèrent de $\frac{2\pi}{p}$, il s'ensuit que, à mesure que l'on suppose p de plus en plus grand, $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$ s'approche de plus en plus de $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin p\omega}{\omega}\omega$ ou de π. Donc la limite de

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$$

est $\pi F(x)$. Doublant ce résultat, on aura la limite de

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,dp\,d\alpha;$$

et, par conséquent, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est continue, on a

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos p(x-a)\,dp\,d\alpha.$$

121. Si $F(x)$ passait brusquement de la valeur A à la valeur B, pour une certaine valeur particulière de x, il faudrait supposer $F(x-\omega)=A$, $F(x+\omega)=B$, et considérer les deux intégrales

$$A\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega+B\int_{0}^{\varepsilon}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega,$$

au lieu de l'intégrale unique

$$F(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega,$$

et l'on voit que la limite, au lieu d'être $\pi F(x)$, serait $\pi\frac{(A+B)}{2}$: d'où l'on conclut que pour ces valeurs particulières de x, la formule (1) donnera pour $F(x)$ la demi-somme des valeurs que prend cette fonction pour deux valeurs de x, l'une plus grande et l'autre plus petite que celle que l'on considère, d'une quantité infiniment petite.

122. Revenons avec plus de détail sur une partie importante de cette démonstration, celle où nous avons prouvé qu'il suffisait de considérer les valeurs de α, infiniment voisines de x, dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\frac{\sin p\,(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha.$$

Pour cela, concevons qu'à partir d'une valeur finie quelconque a, telle que $a-x$ soit un multiple de $\frac{\pi}{p}$, on partage l'intervalle jusqu'à l'infini en parties égales à $\frac{2\pi}{p}$, et considérons d'abord l'intégrale dans le premier intervalle. Soit, pour abréger, $\frac{F(\alpha)}{x-\alpha}=\varphi(\alpha)$. On peut partager l'intégrale $\int_a^{a+\frac{2\pi}{p}} \varphi(\alpha)\sin p\,(x-\alpha)\,d\alpha$ dans les deux suivantes :

$$\int_a^{a+\frac{\pi}{p}} \varphi(\alpha)\sin p\,(x-\alpha)\,d\alpha,\quad \text{et} \int_{a+\frac{\pi}{p}}^{a+\frac{2\pi}{p}} \varphi(\alpha)\sin p\,(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Dans chacune d'elles le facteur trigonométrique a un signe constant, et par conséquent, si on l'intègre isolément, il faudra multiplier le résultat par une valeur de $\varphi(\alpha)$, intermédiaire entre la plus petite et la plus grande de celles

qu'elle prend dans le même intervalle. Or

$$\int_{n}^{a+\frac{\pi}{p}} \sin p(x-\alpha)\,d\alpha = -\int_{a+\frac{\pi}{p}}^{a+\frac{2\pi}{p}} \sin p\,(x-\alpha)\,d\alpha$$

$$= -\frac{2}{p}\cos p\,(\alpha - x) = -\frac{i}{\pi}\cos p\,(a-x),$$

i désignant l'intervalle $\frac{2\pi}{p}$.

Pour le second intervalle, il faudrait changer a en $a+\frac{2\pi}{p}$, ce qui ne changerait rien au résultat de l'intégration que nous venons d'effectuer; et il en serait de même pour tous les intervalles suivants : ce résultat sera constamment

$$-\frac{i}{\pi}\cos p\,(a-x).$$

Pour la première moitié de l'intervalle i, il sera multiplié par une moyenne entre les valeurs de $\varphi(\alpha)$, dans cette moitié; pour la seconde, par une valeur moyenne de $\varphi(\alpha)$ dans cette seconde moitié, puis on devra retrancher ce second produit du premier. Le reste sera donc moindre que le produit $\frac{i}{\pi}\cos p(a-x)$ par la différence de la plus petite et de la plus grande valeur de $\varphi(\alpha)$ dans l'intervalle i que l'on considère. Mais i tendant vers zéro à mesure que p augmente, les deux facteurs de ce produit sont infiniment petits, et le produit est un infiniment petit du second ordre. Donc l'intégrale prise depuis a jusqu'à l'infini tend vers zéro en même temps que p augmente, quelle que soit la valeur finie de a; ce que nous nous étions proposé de démontrer.

Expression d'une fonction périodique arbitraire en série trigonométrique, au moyen d'intégrales définies.

123. Si l'on désigne par u un arc quelconque, on sait que l'on a

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \ldots + \cos mu = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}.$$

Changeons u en $x-\alpha$, multiplions par une fonction arbitraire $F(\alpha)$, et intégrons, par rapport à α, entre deux limites quelconques a et b; nous aurons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)d\alpha + \int_a^b F(\alpha)\cos(x-\alpha)d\alpha + \int_a^b F(\alpha)\cos 2(x-\alpha)d\alpha + \ldots \\ &\quad + \int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

On voit que rien ne serait changé dans les deux membres si l'on augmentait x d'un multiple quelconque, positif ou négatif, de 2π, et que, par conséquent, ils représentent une fonction périodique, dont la période est 2π, quel que soit d'ailleurs le nombre entier m. Or, lorsqu'on fait croître ce nombre indéfiniment, le second membre tend vers une limite qu'il est facile de déterminer, et le premier membre sera le développement en série, de la fonction qui exprime cette limite.

On remarquera, comme dans la question précédente, que l'on peut se borner à considérer les valeurs de α infiniment voisines de celles qui rendent $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0$, vu que l'intégrale tendrait vers zéro, à mesure que m augmenterait, pour tout intervalle dans lequel $\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)$ resterait une quantité finie. Il faut donc se borner aux valeurs de α qui diffèrent infiniment peu des suivantes :

$$x,\quad x \pm 2\pi, \ldots,\quad x \pm 2k\pi,\ \text{etc.}$$

Soit x une valeur quelconque comprise entre a et b, et supposons que $b - a$ soit tout au plus égal à 2π; on considérera seulement les valeurs infiniment petites de $\alpha - x$; on pourra alors remplacer $\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)$ par $\frac{1}{2}(\alpha - x)$, et le second membre de l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{\alpha - x}d(\alpha - x),$$

ε étant infiniment petit; ou, en faisant $\alpha - x = \omega$,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(x+\omega)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}d\omega.$$

Si $F(\alpha)$ est continue dans le voisinage de x, on pourra remplacer $F(x+\omega)$ par $F(x)$, et l'on aura seulement

$$(3) \qquad F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}d\omega;$$

et cette intégrale n'ayant de valeur sensible que pour des valeurs infiniment petites de ω, lorsque m croît indéfiniment, on peut, sans inconvénient, étendre ses limites jusqu'à $-\infty$ et $+\infty$, ce qui facilite l'intégration, et l'on trouve pour résultat π. La limite du second membre étant $\pi F(x)$, on a la formule suivante :

$$(4) \quad \pi F(x) = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)d\alpha + \sum_1^\infty \int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)d\alpha,$$

qui donne le développement de $F(x)$ suivant une série dont le terme général est de la forme

$$A_m \sin mx + B_m \cos mx.$$

Il nous reste à faire quelques observations propres à en fixer le véritable sens.

124. Si l'on donne à x une valeur telle qu'entre a et b il ne tombe aucune des valeurs renfermées dans l'expression $x \pm 2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque qui peut être zéro, l'intégrale (2) est nulle, et la série a pour limite zéro, pour cette valeur de x. Le lieu qui aurait pour ordonnée le second membre de l'équation (4), divisé par π, se composerait donc d'abord du lieu de l'équation $y = \mathrm{F}(x)$ entre $x = a$ et $x = b$, reproduit indéfiniment dans les deux sens de l'axe des x; de telle sorte que les points correspondants seraient distants les uns des autres de 2π, et, en outre, de toutes les parties de l'axe des x comprises entre ces courbes successives.

Si l'intervalle $b - a$ est égal à 2π, le lieu $y = \mathrm{F}(x)$, construit entre $x = a$ et $x = b$, se reproduit à la suite de lui-même indéfiniment, et tous les points correspondants seront distants de 2π.

125. Si x est égal à une des limites de l'intégration, à a par exemple, l'intervalle $b - a$ étant encore égal à 2π, l'intégrale (2) ne sera prise qu'entre 0 et $+\varepsilon$, quand α sera dans le voisinage de a, ce qui donnera $\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)$. Mais, quand α sera dans le voisinage de b, qui est égal à $a + 2\pi$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)$ sera encore infiniment petit; et si l'on pose $\alpha = a + 2\pi - \omega$, on aura

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - x) = \sin\frac{\omega}{2},$$

qu'on remplacera encore par $\frac{\omega}{2}$. On aura ainsi une nouvelle intégrale qui sera égale à $\frac{1}{2}\mathrm{F}(b)$; d'où l'on voit que, lorsqu'on donne à x une valeur égale à l'une quelconque des limites de l'intégration, la série donne la demi-somme des valeurs de $\mathrm{F}(x)$ relatives aux deux limites.

126. Si pour une valeur de x comprise entre a et b, $\mathrm{F}(x)$ n'est pas continue, et passe brusquement de la valeur m à la valeur n, il faudra dans l'intégrale (3) supposer

$F(x) = m$ entre $-\varepsilon$ et o, et $F(x) = n$ entre o et $+\varepsilon$, ce qui donnera pour résultat $\frac{1}{2}(m+n)$. Ainsi, pour une valeur de x qui rend $F(x)$ discontinue, la série donne la demi-somme des valeurs de $F(x)$ qui correspondent à cette même valeur de x.

127. Nous avons supposé que la différence des limites a, b était tout au plus égale à 2π. Voyons ce qui arriverait si cette différence était plus grande que 2π, et que la fonction $F(\alpha)$ fût donnée arbitrairement dans cette étendue : supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $b-a=2\pi+\delta$, δ étant plus petit que 2π. Pour toute valeur de x comprise entre a et $a+\delta$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)$ deviendra nul pour $\alpha = x$ et pour $\alpha = 2\pi + x$; on aura donc à considérer dans l'intégrale $\int_a^b$ les valeurs de α dans le voisinage de x et de $2\pi + x$, et, par conséquent, on trouvera pour valeur de cette intégrale relative à ces valeurs de x,

$$\pi[F(x) + F(x+2\pi)];$$

de même pour toute valeur de x comprise entre $b-\delta$ et b, on trouverait pour valeur de l'intégrale,

$$\pi[F(x) + F(x-2\pi)].$$

Pour les autres valeurs de x comprises entre a et b, l'intégrale aurait simplement pour valeur $F(x)$. On voit ce qui arriverait si $b-a$ renfermait un nombre quelconque de fois 2π, et que la fonction $F(\alpha)$ fût donnée dans toute cette étendue. Ce n'est donc qu'en prenant 2π pour différence des limites de l'intégration, que la série représentera la fonction elle-même $F(x)$ pour toute valeur de x comprise entre ces limites. Dans tous les cas, la fonction représentée par la série aurait pour période 2π.

Si la fonction $F(\alpha)$ est périodique, que 2π soit l'étendue

de la période, et que $b-a$ soit un multiple de 2π, la série représentera évidemment $\pi F(x)$ multiplié par le nombre de fois que $b-a$ contient 2π; en divisant donc par ce nombre, on aurait encore $\pi F(x)$ comme si l'on avait intégré entre a et $a+2\pi$.

128. Si l'on suppose $a=0$, $b=2\pi$, la formule (4) donne, en divisant par π,

$$(5)\quad F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi}F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Si l'on fait $a=-\pi$, $b=+\pi$, on obtient

$$(6)\quad F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha.$$

On peut ainsi développer en une série qui procède suivant les sinus et cosinus des multiples de x, une portion d'une fonction quelconque $F(x)$ comprise entre $x=0$, $x=2\pi$, ou $x=-\pi$, $x=+\pi$, et qui peuvent se composer elles-mêmes de plusieurs parties appartenant à des fonctions de formes tout à fait différentes. Mais cette portion se reproduit indéfiniment dans les deux sens; de sorte que, pour les valeurs de x en dehors de ces limites, la série n'a aucun rapport avec les valeurs que prendrait $F(x)$, d'après la forme de cette fonction. Si, par exemple, $y=F(x)$ représente une parabole, la série, à mesure que x croîtra positivement ou négativement, reproduira périodiquement l'arc de cette parabole compris entre $x=-\pi$, $x=\pi$, et nullement la parabole indéfinie.

129. On peut donner plus de généralité aux formules (5) et (6), en supposant que la fonction à développer est donnée dans un intervalle quelconque $2l$ au lieu de 2π.

Or, si l'on fait $x=\frac{\pi z}{l}$, et $\alpha=\frac{\pi 6}{l}$, les formules en



question donneront

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right) = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} F\left(\frac{\pi 6}{l}\right) d6$$
$$+ \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_0^{2l} F\left(\frac{\pi 6}{l}\right) \cos\frac{m\pi}{l}(z - 6)\, d6,$$

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi 6}{l}\right) d6$$
$$+ \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi 6}{l}\right) \cos\frac{m\pi}{l}(z - 6)\, d6;$$

ou, en représentant $F\left(\frac{\pi z}{l}\right)$ par $\varphi(z)$, qui sera une fonction arbitraire de z, connue entre o et $2l$, ou entre $-l$ et $+l$, et remplaçant z par la lettre x, qui est plus généralement employée, on aura les deux formules suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_0^{2l} \varphi(\alpha)\, d\alpha \\ \qquad + \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_1^{\infty}\int_0^{2l} \varphi(\alpha) \cos m\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\, d\alpha, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\, d\alpha \\ \qquad + \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \cos m\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\, d\alpha. \end{cases}$$

130. Si la fonction $\varphi(x)$ est telle que l'on ait

$$\varphi(-x) = \varphi(x),$$

on obtiendra

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \sin m\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha = 0,$$

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \cos m\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha = 2\int_0^{l} \varphi(\alpha) \cos m\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha;$$

la formule (8) devient alors

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos m\frac{\pi x}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\cos m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha, \end{cases}$$

et de même la formule (6) deviendra

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad + \sum_1^\infty \cos mx\int_0^\pi \varphi(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha. \end{cases}$$

131. Si l'on avait, au contraire, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, il en résulterait

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\cos m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha = 0,$$

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha)\sin m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha = 2\int_0^l \varphi(\alpha)\sin m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha;$$

la formule (8) se réduirait à celle-ci :

$$(11)\quad \varphi(x) = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin m\frac{\pi x}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

et la formule (6) à la suivante :

$$(12)\quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin mx\int_0^\pi \varphi(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha.$$

132. La formule (8) représentant une fonction arbitraire entre $x = -l$ et $x = l$, il suffira de faire croître l indéfiniment et de passer à la limite, pour avoir l'expression d'une fonction quelconque depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$.

Nous allons montrer comment le signe Σ se changeant en un signe d'intégration, on retrouve ainsi la formule que nous avons démontrée d'abord, et qui renferme deux intégrales définies.

Nous supposerons, pour éviter toute difficulté, que $\varphi(x)$ ne devienne jamais infini, et soit nul pour $x = -\infty$ et $x = \infty$; de sorte que la courbe représentée par $y = \varphi(x)$ finit par s'approcher indéfiniment de l'axe des x, lorsque x croît indéfiniment, soit positivement, soit négativement.

Le premier terme du second membre de l'équation (8), $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)d\alpha$, tendra vers zéro lorsque l croîtra sans limite, et il suffira de considérer la seconde partie de ce même membre, qui peut être écrite comme il suit, en posant $\frac{\pi}{l} = \varepsilon$:

$$(13)\left\{\begin{array}{l}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos\varepsilon(x-\alpha)d\alpha + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 2\varepsilon(x-\alpha)d\alpha + \ldots \\ \qquad\qquad + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\varepsilon(x-\alpha)d\alpha + \ldots\end{array}\right.$$

Or, si l'on fait $m\varepsilon = p$, on peut regarder p comme une variable à laquelle on donne successivement des accroissements égaux à ε dans la fonction générale

$$\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha;$$

et en multipliant, pour chaque valeur de p, cette fonction par l'accroissement de p, la somme de tous ces éléments depuis $p = 0$ jusqu'à p infini ne sera autre chose que l'expression (13) multipliée par π. Si maintenant on fait croître l indéfiniment, ε tendra vers zéro, et la somme (13)

tendra vers l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha.$$

L'équation (8) conduit donc ainsi à la suivante :

$$(14)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha,$$

ou, en prenant pour limites de p, $-\infty$ et $+\infty$, ce qui double l'intégrale,

$$(15)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos p(x-a)\,d\alpha;$$

et ces formules ont lieu pour toutes les valeurs de x, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Elles ne diffèrent pas de celle que nous avons démontrée primitivement.

133. Dans le cas où $\varphi(-x)=\varphi(x)$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin p\alpha\,d\alpha=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha=2\int_0^\infty\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha,$$

et les formules (14) et (15) se réduisent à celle-ci :

$$(16)\qquad \varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\cos px\int_0^\infty\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha.$$

Si l'on a, au contraire, $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, on trouvera

$$(17)\qquad \varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\sin px\int_0^\infty\varphi(\alpha)\sin p\alpha\,d\alpha;$$

et réciproquement, si l'on emploie les formules (16) ou (17), le second membre se formera par les valeurs

de $\varphi(x)$ relatives à x positif; et quelles que soient les valeurs de $\varphi(-x)$ d'après la nature de la fonction φ, ces formules donneront pour x négatif, $\varphi(x)$ pour la première, et $-\varphi(x)$ pour la seconde.

Toutes ces formules, qui servent à représenter des fonctions entièrement arbitraires, données entre des limites finies ou infinies de la variable, sont de la plus grande utilité dans les applications de l'analyse aux questions de physique ou de mécanique moléculaire.

Si l'on avait à exprimer d'une manière analogue une fonction de deux variables x et y, on la considérerait d'abord comme fonction de x, y étant traité comme une constante, et l'on ferait usage des formules ci-dessus. La fonction $\varphi(\alpha)$ contiendrait alors y et pourrait, par conséquent, s'exprimer par les mêmes formules, ce qui doublerait le nombre des signes d'intégration ou de sommation; et l'on agirait de la même manière pour un nombre quelconque de variables.

Exemples divers.

134. Proposons-nous d'abord de développer en série trigonométrique une fonction qui est égale à une constante entre $x=0$, $x=l$, et à la même constante changée de signe, entre $x=0$, $x=-l$. Il suffira évidemment de prendre cette constante égale à l'unité, et l'on passera ensuite à toute autre valeur, par une simple multiplication.

Nous supposerons donc $\varphi(x)=1$ dans la formule (11), et nous aurons

$$1=\frac{2}{l}\sum\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^l\sin m\frac{\pi\alpha}{l}d\alpha=\frac{2}{\pi}\sum\frac{1-\cos m\pi}{m}\sin m\frac{\pi x}{l}.$$

Or, pour m pair, $1-\cos m\pi=0$; et pour m impair,

$1 - \cos m\pi = 2$; d'où l'on conclut

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi x}{l} + \ldots\right);$$

ce qui est la formule demandée. La fonction indéfinie est périodique, et l'amplitude de la période est $2l$.

135. Développons maintenant la fonction qui serait égale à x entre les limites $-l$ et $+l$.

Comme on a alors $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, il faut faire usage de la formule (11), et l'on trouvera

$$(a) \qquad x = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin m\frac{\pi x}{l}\int_0^l \alpha \sin m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$x = \frac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{4}\sin 4\frac{\pi x}{l} + \ldots\right).$$

Mais si l'on voulait que la fonction fût égale à x, entre o et l, et à $-x$ entre o et $-l$, on aurait $\varphi(-x) = \varphi(x)$, et il faudrait employer la formule (9). On aurait alors

$$x = \frac{1}{l}\int_0^l \alpha\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos m\frac{\pi x}{l}\int_0^l \alpha\cos m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

ou, en effectuant les intégrations,

$$(b)\quad x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{7^2}\cos 7\frac{\pi x}{l} + \ldots\right).$$

Ces deux formules (a), (b), représentent la même valeur x entre o et l, mais elles ont des valeurs égales et de signes contraires entre o et $-l$: elles ont d'ailleurs l'une et l'autre $2l$ pour période.

On voit par là que les lieux dont ces développements seraient les ordonnées auraient des parties de longueur

finie qui coïncideraient, et d'autres parties qui seraient différentes pour l'un et l'autre.

136. Cherchons maintenant l'expression en série de l'ordonnée du trapèze isocèle AMNB, dont la base AB est égale à π, et qui est tel que depuis A jusqu'à l'abscisse $AP = \alpha$, on ait $y = x$; depuis P jusqu'à Q, $y = \alpha$, et depuis Q jusqu'à B, $y = \pi - x$. Supposons, de plus, que l'on ait $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il faut, dans ce cas, faire usage de la formule (12), et l'on trouvera, toute réduction faite, pour expression de l'ordonnée y de ce contour,

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin\alpha\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5x + \ldots\right).$$

Si l'on suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le trapèze se réduit à un triangle isocèle AOB, et l'équation de cette ligne brisée sera

$$y = \frac{4}{\pi}\left(x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \frac{1}{7^2}\sin 7x + \ldots\right).$$

137. Considérons maintenant des fonctions données depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$.

Supposons que l'on doive avoir $y = e^{-x}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, et $y = e^{x}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -\infty$; on aura alors la condition $\varphi(-x) = \varphi(x)$, et il faudra faire usage de la formule (16). Elle donnera

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\cos px\int_0^\infty e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha.$$

Or

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha = \frac{1}{1+p^2};$$

on aura donc

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos px\, dx}{1+p^2}.$$

Et, en effet, nous avons déjà eu occasion de reconnaître que cette expression est équivalente à e^{-x} quand x est positif, et à e^x quand x est négatif.

138. Terminons ces exemples par le cas d'une fonction qui soit égale à l'unité pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et nulle pour toute autre valeur de x.

On a, dans ce cas, $\varphi(-x)=\varphi(x)$, et l'on aura recours à la formule (16).

Or, la fonction étant nulle depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, l'intégration donnera zéro dans toute cette étendue, et, par conséquent, il suffit de la considérer entre les limites 0 et 1 ; ce qui donnera

$$y=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\cos px\int_0^1 \cos p\alpha d\alpha;$$

et comme on a

$$\int_0^1 \cos p\alpha d\alpha=\frac{\sin p}{p},$$

on en conclura

$$y=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p\cos px}{p}dp;$$

et l'on a ainsi une expression qui est égale à 1 pour toute valeur de x entre -1 et $+1$, et égale à zéro pour toute valeur de x en dehors de ces limites. Il est d'ailleurs facile d'en faire la vérification. En effet, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin p\cos px}{p}dp=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin(x+1)p}{p}dp-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin(x-1)p}{p}dp.$$

Or, si l'on a $x>1$, les deux intégrales qui entrent dans le second membre sont égales à $\frac{\pi}{2}$, et les deux termes se détruisent. Il en est de même si $x<-1$; ce qui prouve d'abord que l'intégrale en question est nulle pour toute valeur de x qui est en dehors des limites -1 et $+1$.

Si maintenant x est entre -1 et $+1$, les deux termes s'ajoutent et donnent pour somme $\frac{\pi}{2}$, d'où résulte $y = 1$; ce qu'il fallait vérifier.

Intégration des équations aux différentielles partielles.

139. Nous avons vu comment on peut déterminer une fonction de plusieurs variables indépendantes, lorsque l'on connaît ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à chaque variable, tant au moyen de ces variables que de la fonction elle-même. Nous allons supposer maintenant que l'on donne seulement une équation où entrent ses dérivées partielles d'un ordre quelconque.

Considérons une équation renfermant d'une manière quelconque les deux variables indépendantes x, y, la fonction z et toutes ses dérivées partielles qui ne dépassent pas l'ordre m; elle pourra se mettre sous la forme

$$(1)\quad \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dx^m}, \frac{dz}{dy}, \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}, \ldots, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dy^m}\right) = 0$$

En considérant z comme fonction de x, on peut le développer par la formule de Taylor, ou par celle de Maclaurin, que nous emploierons comme la plus simple.

L'équation (1) donnera la valeur de $\frac{d^mz}{dx^m}$ en fonction de x, y, z et des autres dérivées, dans lesquelles il y aura tout au plus $m-1$ différentiations par rapport à x. En différentiant la valeur de $\frac{d^mz}{dx^m}$ par rapport à x, on aura $\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}$; et son expression renfermera $\frac{d^mz}{dx^m}$, ainsi que sa dérivée par rapport à y. Mais si l'on remet, au lieu de $\frac{d^mz}{dx^m}$, sa valeur

tirée de (1), on n'aura plus de dérivée qui dépasse l'ordre $m-1$ par rapport à x. En continuant ainsi indéfiniment, on aura toutes les dérivées partielles par rapport à x, depuis la $m^{ième}$ jusqu'à l'infini, exprimées au moyen de x, y, z, $\frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}$, et de leurs dérivées par rapport à y seulement.

Il s'agit maintenant d'obtenir les valeurs de toutes les dérivées par rapport à x, quand on y fait $x=0$, ce qui les rend fonctions de y seulement. Pour cela, on observera qu'en faisant $x=0$ dans une fonction de x et y, et différentiant par rapport à y, on a le même résultat qu'en différentiant d'abord, puis faisant $x=0$; ainsi $\frac{d^{p+q}z}{dx^p\,dy^q}$, dans lequel on fait $x=0$, est identique avec $\frac{d^q\left(\frac{d^pz}{dx^p}\right)_0}{dy^q}$, en désignant par $\left(\frac{d^pz}{dx^p}\right)_0$ ce que devient $\frac{d^pz}{dx^p}$ quand on y fait $x=0$. Il suit de là que toutes les dérivées de z par rapport à x, dans lesquelles on fera $x=0$, se déduisent de z et des $m-1$ premières, et des dérivées que donnent ces m fonctions de y par rapport à y. D'ailleurs, l'équation proposée laisse arbitraires ces m fonctions, et ne détermine que les suivantes. On pourra donc effectuer le développement de z par rapport à x, comme il suit :

$$z = Y + Y_1 x + Y_2\frac{x^2}{1.2} + \ldots + Y_{m-1}\frac{x^{m-1}}{1.2\ldots m-1} + \ldots,$$

$Y, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ étant des fonctions entièrement arbitraires de y. Et l'on pourrait démontrer à posteriori, comme dans le cas des équations différentielles, que ce développement donne identiquement la même valeur pour $\frac{d^mz}{dx^m}$ que l'équation (1).

140. Si au lieu de deux variables indépendantes, on en avait un nombre n quelconque, on pourrait toujours supposer la fonction développée par rapport aux puissances de x; il n'y aurait de différence qu'en ce que $Y, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ désigneraient des fonctions arbitraires de toutes les variables indépendantes, excepté x.

141. Réciproquement, on sera assuré d'avoir l'intégrale générale d'une équation comme celle que nous considérons, lorsque la fonction et ses $m - 1$ premières dérivées par rapport à x, dans lesquelles on fera $x = 0$, pourront être égalées à des fonctions entièrement arbitraires de toutes les variables indépendantes, excepté x; car, puisque l'intégrale donnée satisfait à l'équation proposée, tous les termes de son développement, à partir du $m^{ième}$, se déduisent des m premiers, de la même manière que dans le développement de l'intégrale générale. Or ces m premiers sont identiques dans les deux développements; donc tous les autres le sont, et la fonction donnée ne diffère pas de l'intégrale générale.

142. Nous avons supposé l'équation du $m^{ième}$ ordre complète; mais il suffit évidemment, pour que nos raisonnements subsistent, qu'en la résolvant par rapport au coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé de la fonction, pris par rapport à une variable seulement, il n'entre dans son expression aucune quantité où il se trouve un nombre aussi grand de différentiations par rapport à la même variable. Dans le cas particulier où cette circonstance ne se présenterait relativement à aucune des variables, le développement ne pourrait plus se faire de la même manière, et nous nous écarterions de l'objet de ce cours en nous en occupant d'une manière générale.

143. Si les coefficients différentiels les plus élevés par rapport à x et y ne sont pas du même ordre, le développement ne renfermera pas le même nombre de fonctions

arbitraires, si on l'ordonne successivement par rapport à des variables différentes; mais ces fonctions ne renferment pas les mêmes variables, et tous ces développements sont au fond identiques, puisqu'ils représentent tous la fonction la plus générale qui satisfasse à la même équation.

144. Lorsqu'il n'entre que des dérivées prises par rapport à une des variables, on regardera toutes les autres comme des constantes, et l'on aura à intégrer une équation différentielle à deux variables. Les constantes introduites par cette intégration seront considérées comme des fonctions arbitraires des variables que l'on avait regardées comme constantes.

Soit, par exemple,

$$\frac{d^m z}{dx^m} = \mathrm{F}(x, y),$$

on aura

$$z = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_1 x + \ldots + \mathrm{Y}_{m-1} x^{m-1} + \varphi(x, y),$$

$\varphi(x,y)$ étant la fonction que l'on obtiendra en intégrant m fois $\mathrm{F}(x, y)$ par rapport à x, et $\mathrm{Y},\ldots, \mathrm{Y}_{m-1}$ étant des fonctions arbitraires de y.

145. Considérons maintenant l'équation

$$\frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n} = \mathrm{F}(x, y),$$

qui rentre dans le cas où nous avons dit qu'on ne pouvait effectuer le développement par rapport aux puissances de l'une des variables.

Si l'on pose $\dfrac{d^n z}{dy^n} = u$, on aura

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \mathrm{F}(x, y),$$

d'où

$$u = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_1 x + \ldots + \mathrm{Y}_{m-1} x^{m-1} + \int^m \mathrm{F}(x, y) dx^m = \frac{d^n z}{dy^n}.$$

Intégrant maintenant n fois par rapport à y, et observant qu'à chaque intégration totale il faut ajouter une seule fonction arbitraire de x, et que les intégrales de $Y,\ldots, Y_{m-1}$ seront de nouvelles fonctions arbitraires de y, on aura

$$z=\int^n dy^n \int^m dx^m F(x,y) + Y' + Y''x + \ldots + Y^{(m)} x^{m-1} + X + X_1 y + \ldots + X_{n-1} y^{n-1}.$$

On voit que ce développement renferme des fonctions arbitraires de chacune des variables séparément.

146. Appliquons la formule de Maclaurin à l'intégration de l'équation très-simple

$$\frac{dz}{dx} = a\frac{dz}{dy}.$$

On en tire, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a\frac{d^2z}{dx\,dy} = a\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dy} = a^2\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = a^3\frac{d^3z}{dy^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^mz}{dx^m} = a^m\frac{d^mz}{dy^m};$$

donc

$$z=z_0+\frac{dz_0}{dy}ax+\frac{d^2z_0}{dy^2}\cdot\frac{a^2x^2}{1.2}+\ldots+\frac{d^mz_0}{dy^m}\cdot\frac{a^mx^m}{1.2\ldots m}+\ldots.$$

Or le second membre représente le développement de la fonction de y représentée par z_0, et dans laquelle on change y en $y+ax$. Comme d'ailleurs z_0 est une fonction arbitraire $F(y)$, on aura, pour l'intégrale cherchée,

$$z = F(y + ax).$$

On trouve ainsi une fonction arbitraire renfermant

deux variables, mais d'une manière déterminée; ce n'est donc pas une fonction arbitraire par rapport aux deux variables.

Équations linéaires aux différentielles partielles.

147. Lorsque l'équation linéaire ne renferme pas de terme indépendant de z et de ses dérivées, il est facile de voir que la somme d'un nombre quelconque d'intégrales particulières satisfait encore à la même équation.

Lorsque, de plus, les coefficients sont constants, on y satisfait par des expressions analogues à celles que l'on a trouvées dans les équations différentielles.

Si l'on considère, par exemple, une équation de l'ordre m, renfermant la fonction z et ses dérivées par rapport à x et y, multipliées par des constantes, on pourra poser $z = Ce^{\alpha x + 6y}$; l'exponentielle disparaîtra, ainsi que C, par la substitution dans l'équation donnée, et il restera une équation du $m^{ième}$ degré entre α et 6. Elle pourra donner m valeurs de 6 en fonction de α; si l'on en désigne une par $\varphi(\alpha)$, on aura une solution de l'équation, en posant

$$z = \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi(\alpha)}.$$

Les quantités α et C peuvent changer d'une manière quelconque en passant d'un terme à l'autre de cette somme, et le nombre des termes est entièrement arbitraire; s'il est infini, et que C soit fini, on a une série; mais si C est infiniment petit, et de la forme $F(\alpha)\,d\alpha$, F désignant une fonction arbitraire, on a une intégrale prise par rapport à α. La valeur de z est alors $z = \int F(\alpha) e^{\alpha x + y\varphi(\alpha)} d\alpha$, et renfermera une fonction arbitraire.

148. Lorsque les valeurs de 6 sont toutes linéaires par rapport à α, c'est-à-dire quand on a $6 = a\,\alpha + b$, il est

facile d'exprimer, sous forme finie, l'intégrale générale de l'équation.

En effet, une des valeurs de β donnera la série

$$z = \Sigma C e^{by} e^{\alpha(x+ay)} = e^{by} \Sigma C e^{\alpha(x+ay)}.$$

Or, C et α étant arbitraires, $\Sigma C u^{\alpha}$ représente une fonction quelconque de u; donc $\Sigma C e^{\alpha(x+ay)}$ représente une fonction arbitraire de e^{x+ay}, et par suite de $x+ay$. Si on la désigne par $F(x+ay)$, et qu'on raisonne semblablement pour les m valeurs de β, on aura, en ajoutant ces m solutions,

$$z = e^{by} F(x+ay) + e^{b_1 y} F_1(x+a_1 y) + \ldots + e^{b_{m-1} y} F_{m-1}(x+a_{m-1} y).$$

Cette expression renferme m fonctions arbitraires telles, que si l'on développait par rapport aux puissances de x, les m premiers coefficients pourraient généralement être égalés à des fonctions arbitraires de y. Elle représente donc l'intégrale générale.

149. Appliquons cette méthode à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

qui détermine les mouvements vibratoires, soit des cordes élastiques, soit de l'air dans les tuyaux cylindriques.

On posera $z = C e^{\alpha x + \beta y}$, et l'on aura

$$\alpha^2 - a^2 \beta^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \pm a\beta;$$

par suite,

$$z = \Sigma C e^{\beta(y+ax)}, \quad \text{et} \quad z = \Sigma C_1 e^{\beta(y-ax)}.$$

L'intégrale générale est donc

$$z = F(y+ax) + F_1(y-ax).$$

Les fonctions F, F_1 se détermineront facilement si l'on connaît z, $\frac{dz}{dx}$ pour $x = 0$.

Soient, en effet,

$$z_0 = f(y), \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = \varphi(y);$$

les fonctions F et F_1 devront satisfaire aux deux conditions

$$F(y) + F_1(y) = f(y), \quad F'(y) - F'_1(y) = \frac{1}{a}\varphi(y).$$

Intégrons les deux membres de la dernière, et représentons $\int_0 \varphi(y)dy$ par $\psi(y)$, nous obtiendrons

$$F(y) - F_1(y) = \frac{1}{a}\psi(y) + C,$$

C désignant une constante arbitraire. On tire de ces équations

$$2F(y) = f(y) + \frac{1}{a}\psi(y) + C,$$

$$2F_1(y) = f(y) - \frac{1}{a}\psi(y) - C;$$

la valeur générale de z, satisfaisant à toutes les conditions, sera donc

$$z = \frac{f(y+ax) + f(y-ax)}{2} + \frac{\psi(y+ax) - \psi(y-ax)}{2a}.$$

Intégration des équations différentielles partielles linéaires, par le moyen des intégrales définies.

150. Nous avons dit tout à l'heure comment, en partant d'intégrales particulières, on pouvait en obtenir de plus générales, renfermant des fonctions arbitraires, et exprimées par des intégrales prises par rapport à des variables différentes de celles qui entrent dans l'équation proposée. Le choix que l'on doit faire pour la forme des

intégrales particulières doit être tel, que les fonctions arbitraires que l'on aura introduites puissent se déterminer facilement au moyen des données ; et ces données sont ordinairement les valeurs que reçoivent la variable principale et quelques-unes de ses dérivées par rapport à une des variables indépendantes, lorsque l'on donne à cette dernière une valeur particulière. Considérons, comme premier exemple, l'équation

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2},$$

qui détermine le mouvement de la chaleur dans une barre prismatique, dont la surface latérale est imperméable.

La question sera entièrement déterminée, d'après ce que nous avons vu, si l'on connaît la valeur de z relative à $x = 0$. Soit donc donné

$$(2) \qquad z = \text{F}(y) \quad \text{pour} \quad x = 0;$$

on satisfera à l'équation (1) en prenant

$$z = e^{nx} \cos my,$$

pourvu que $n = -a^2 m^2$. On peut même, au lieu de y, mettre $y - \alpha$, puis multiplier par une constante arbitraire A, ce qui donnera la valeur particulière

$$z = \text{A} e^{-a^2 m^2 x} \cos m(y - \alpha).$$

Faisons croître les constantes arbitraires m et α par degrés infiniment petits dm, $d\alpha$, et supposons que A soit de la forme

$$f(\alpha)\, d\alpha dm,$$

f désignant une fonction arbitraire ; la somme d'un nombre quelconque de ces solutions infiniment petites sera encore une solution. On aura donc une valeur plus géné-

rale de z en prenant

$$z = \int\int f(\alpha)\, e^{-a^2m^2x} \cos m(y-\alpha)\, dm\, d\alpha,$$

les limites des deux intégrales étant arbitraires.

Or cette valeur de z se réduit, pour $x = 0$, à

$$\int\int f(\alpha) \cos m(y-\alpha)\, dm\, d\alpha.$$

Donc, si l'on prend $-\infty$ et $+\infty$ pour limites de ces intégrales, on trouvera pour résultat $2\pi f(y)$; ce qui détermine $f(y)$, puisque, d'après la condition donnée, on devra avoir

$$2\pi f(y) = \mathrm{F}(y).$$

La valeur de z, qui satisfait à l'équation (1) et à la condition (2), sera donc

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\alpha)\, e^{-a^2m^2x} \cos m(y-\alpha)\, dm\, d\alpha,$$

et toute valeur de z qui satisferait à ces deux équations serait identique avec celle-ci, sous quelque forme qu'elle se présentât. Il ne reste plus qu'à chercher si l'expression peut être simplifiée.

Or on a la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2u^2} \cos 2pu\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{n} e^{-\frac{p^2}{n^2}};$$

d'où il suit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2m^2x} \cos m(y-\alpha)\, dm = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{x}} e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4a^2x}},$$

et, par suite,

$$z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y-\alpha}{2a\sqrt{x}}\right)^2} \mathrm{F}(\alpha)\, d\alpha,$$

expression qui ne renferme plus qu'une intégrale définie simple.

On peut lui donner une forme plus commode en posant

$$\left(\frac{y-\alpha}{2a\sqrt{x}}\right)^2 = \beta^2, \quad \text{d'où} \quad \alpha = y \pm 2a\beta\sqrt{x},$$

et

$$d\alpha = \pm 2a\sqrt{x}d\beta.$$

Si l'on prend les signes supérieurs, les limites de β seront les mêmes que celles de α, et l'on aura

$$(3) \qquad z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} F(y + 2a\beta\sqrt{x})d\beta.$$

Si l'on prenait les signes inférieurs, les limites seraient renversées, et, en les remettant dans le même ordre, on trouverait pour valeur de z,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} F(y - 2a\beta\sqrt{x})d\beta,$$

qui ne diffère pas de la précédente, vu que β passe par toutes les valeurs positives et négatives, et que $e^{-\beta^2}$ ne change pas quand β change de signe.

La solution générale de la question est donc donnée par l'équation (4).

151. Soit maintenant

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} = a^2\frac{d^2z}{dy^2} + bz,$$

z étant assujetti à la condition

$$(2) \qquad z = F(y) \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Si l'on pose $z = e^{bx}u$, l'équation (1) donne

$$\frac{du}{dx} = a^2\frac{d^2u}{dy^2},$$

et la condition (2) conduit à la suivante :

$$u = F(y) \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

La détermination de u se ramène donc au cas précédent, et z s'ensuivra.

152. Intégrons maintenant l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

que nous avons déjà traitée par une autre méthode, et qui se rapporte au problème des cordes vibrantes. Ajoutons-y les deux conditions suivantes, pour déterminer les fonctions arbitraires

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & y = F(x) \\ (3) & \frac{dy}{dt} = f(x)\end{array}\right\} \text{pour } t = 0.$$

On satisfera à l'équation (1) en prenant

$$y = A \cos amt \cos m(x - \alpha),$$

A, m, α étant des constantes arbitraires. On aura une solution plus générale, en supposant $A = \varphi(\alpha) dm d\alpha$, et intégrant par rapport à α et m entre $-\infty$ et $+\infty$, $\varphi(\alpha)$ désignant une fonction arbitraire. On aura ainsi

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos amt \cos m(x - \alpha) dm d\alpha.$$

Cette expression se réduit à $2\pi\varphi(x)$ pour $t = 0$. Donc, si l'on prend $\varphi(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{2\pi}$, on trouvera $F(x)$ pour $t = 0$; d'où l'on voit que l'expression

$$(4) \qquad y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos amt \cos m(x - \alpha) dm d\alpha$$

satisfait aux équations (1) et (2); mais elle donne $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, et, par conséquent, ne satisfait pas à la condition (3). Il reste donc à trouver une valeur de y qui satisfasse aux équations (1), (3) et devienne nulle pour $t = 0$; en l'ajoutant à celle que donne l'équation (3), on aura une valeur de y qui satisfera à toutes les conditions.

On remarquera d'abord que si une fonction y satisfait à l'équation (1), les fonctions $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., y satisferont également, ainsi que $\int^t y\,dt$, lorsque $\frac{dy}{dt}$ est nul pour $t = 0$.

Si donc on intègre par rapport à t l'expression (4) et qu'on y remplace la fonction $F(\alpha)$ par $f(\alpha)$, on aura une solution de l'équation (1) qui, différentiée par rapport à t, se réduira à $f(x)$ pour $t = 0$, et qui, de plus, deviendra nulle pour $t = 0$. On obtient ainsi l'expression

$$y = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\frac{\sin amt}{m}\cos m(x-a)\,dm\,d\alpha,$$

qu'on peut d'ailleurs vérifier facilement. La valeur de y qui satisfait aux équations (1), (2), (3), et qui est la seule qui puisse y satisfaire, est donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos amt\cos m(x-\alpha)\,dm\,d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\frac{\sin amt}{m}\cos m(x-\alpha)\,dm\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant si ces intégrales doubles sont réductibles, et considérons d'abord la première.

On peut remplacer $\cos amt \cos m(x-\alpha)$ par

$$\frac{\cos m(x+at-\alpha) + \cos m(x-at-\alpha)}{2},$$

et la partie que nous considérons du second membre de l'équation (5) deviendra

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)[\cos m(x+at-\alpha)+\cos m(x-at-\alpha)]\,dm\,d\alpha,$$

ou

$$\frac{F(x+at)+F(x-at)}{2}.$$

Passons à la seconde partie, et remplaçons-y

$$\sin amt \cos m(x-\alpha)$$

par

$$\frac{\sin m(x+at-\alpha)-\sin m(x-at-\alpha)}{2};$$

elle deviendra alors

$$(6)\quad \frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\left[\frac{\sin m(x+at-\alpha)}{m}-\frac{\sin m(x-at-\alpha)}{m}\right]dm\,d\alpha.$$

Or on sait que, quelque valeur qu'ait p, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin pm}{m}\,dm$$

est égale à π lorsque p est positif, à $-\pi$ lorsque p est négatif.

Donc l'expression (6) sera nulle toutes les fois que $x+at-\alpha$ et $x-at-\alpha$ seront de même signe; et par conséquent, il suffit de considérer les valeurs de α qui donnent à ces deux quantités des signes différents. Ces valeurs seront déterminées par les inégalités

$$x+at-\alpha>0,\quad x-at-\alpha<0,$$

si t est positif; et par

$$x+at-\alpha<0,\quad x-at-\alpha>0,$$

si t est négatif. Les premières donnent

$$\alpha > x - at, \quad \alpha < x + at;$$

les dernières donnent

$$\alpha > x + at, \quad \alpha < x - at.$$

Il suffira donc que l'intégration par rapport à α soit faite entre les limites $x - at$, $x + at$.

Si $t > 0$, $x + at - \alpha$ sera positif, et l'on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m(x + at - \alpha)}{m} dm = \pi;$$

l'expression (6) se réduira alors à

$$(7) \qquad \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f(\alpha)\, d\alpha.$$

Si $t < 0$, $x + at - \alpha$ sera négatif; on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m(x + at - \alpha)}{m} dm = -\pi,$$

et l'expression (6) deviendra

$$\frac{-1}{2a}\int_{x+at}^{x-at} f(\alpha)\, d\alpha,$$

ce qui coïncide avec (7), qu'il suffit alors de considérer.

Désignons $\int f(x)dx$ par $\psi(x)$, l'expression (7) deviendra

$$\frac{\psi(x + at) - \psi(x - at)}{2a},$$

et la formule (5) se réduit à la suivante :

$$y = \frac{F(x + at) + F(x - at)}{2} + \frac{\psi(x + at) - \psi(x - at)}{2a}.$$

Elle coïncide alors avec celle que nous avions trouvée

précédemment par un procédé plus simple. Mais nous avons cru qu'il pouvait être bon de l'obtenir par cette nouvelle voie, non-seulement pour faire une application de la méthode des intégrales définies, mais parce que la réduction que nous avons faite des intégrales doubles offre des particularités qu'on rencontre dans d'autres circonstances moins simples, où elles pourraient arrêter ceux qui ne seraient pas encore habitués à ce genre d'analyse.

153. Soit encore l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

qui exprime le mouvement vibratoire d'une lame élastique.

Ajoutons-y les deux conditions

$$\left.\begin{array}{lr}(2) & y = F(x) \\ (3) & \dfrac{dy}{dt} = f(x)\end{array}\right\} \text{pour } t = 0,$$

la question sera entièrement déterminée, et ne pourra avoir qu'une seule solution.

On essayera d'abord de satisfaire à l'équation (1) par une valeur simple de la forme

$$y = \cos mt \cos n(x - \alpha),$$

et l'on trouvera qu'il suffit pour cela que l'on ait

$$m = n^2;$$

on aura ainsi la valeur particulière

$$y = A \cos n^2 t \cos n(x - \alpha),$$

A, n, α étant des constantes arbitraires.

Supposant encore $A = \varphi(\alpha)\, d\alpha dn$, et intégrant par rapport à n et α, entre $-\infty$ et $+\infty$, on aura une solu-

tion plus générale de l'équation (1), exprimée par la formule

$$y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos n^2 t \cos n(x-\alpha)\, dn d\alpha.$$

Si l'on y fait $t = 0$, elle se réduit à $2\pi\varphi(x)$; et, par conséquent, on satisferait à la condition (2) en prenant

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{2\pi}.$$

Ainsi l'expression

$$(4)\qquad y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos n^2 t \cos n(x-\alpha)\, dn d\alpha$$

satisfait aux équations (1), (2), et donne $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$. Il suffit donc de trouver une nouvelle valeur de (y) qui satisfasse aux équations (1), (3), et se réduise à zéro pour $t = 0$; en l'ajoutant à celle que donne l'équation (4), on aura la solution cherchée. Or, si l'on intègre par rapport à t, entre les limites 0 et t, une valeur de y satisfaisant à l'équation (1), et telle que $\frac{dy}{dt} = 0$, pour $t = 0$, le résultat y satisfera encore. Si donc on intègre l'expression (4) par rapport à t, en remplaçant F par f, on aura une solution de l'équation (1), qui, différentiée par rapport à t, deviendra $f(x)$ pour $t = 0$, et satisfera, par conséquent, à la condition (3). De plus, cette valeur de y deviendra nulle pour $t = 0$, puisque l'intégrale est prise à partir de $t = 0$; donc, en l'ajoutant à celle que donne l'équation (4), on aura la solution de la question proposée : on obtient ainsi

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos n^2 t \cos n(x-\alpha)\, dn d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\frac{\sin n^2 t}{n^2}\cos n(x-\alpha)\, dn d\alpha. \end{aligned} \right.$$

La première partie de cette solution peut être mise sous une forme plus simple en effectuant l'intégration par rapport à n.

En effet, nous avons fait connaître la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos z^2 \cos 2\beta z dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos \beta^2 + \sin \beta^2);$$

posant $z = n\sqrt{t}$, $\beta = \frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}$, on conclura de l'équation précédente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos n^2 t \cos n(x-\alpha) dn$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\left[\cos\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \sin\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2\right].$$

La première partie de la valeur de y, qui donne la solution complète de la question, toutes les fois que l'on doit avoir $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, prend ainsi la forme suivante :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\alpha)\left[\cos\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \sin\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2\right] d\alpha,$$

ou, en posant $\frac{\alpha - x}{2\sqrt{t}} = \beta$, d'où $d\alpha = 2d\beta\sqrt{t}$,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \beta^2 + \sin \beta^2)\, \mathrm{F}(x + 2\beta\sqrt{t})\, d\beta.$$

154. Nous allons encore faire connaître l'intégrale d'une équation qui se présente souvent dans les problèmes de physique mathématique. Mais il est nécessaire, auparavant, de résoudre une question auxiliaire qui consiste à ramener à une intégrale simple l'expression

$$(a) \quad \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(l\cos\theta + m\sin\theta\cos\psi + n\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

F désignant une fonction entièrement arbitraire; l, m, n des quantités quelconques indépendantes de θ et ψ; ces limites o, π se rapportant à l'angle θ; et o, 2π à l'angle ψ. De sorte que ces deux angles, considérés comme coordonnées polaires relatives à des axes rectangulaires, détermineraient successivement toutes les directions autour de l'origine. Cela posé, soient

$$l = k\cos\theta', \quad m = k\sin\theta'\cos\psi', \quad n = k\sin\theta'\sin\psi',$$

d'où

$$k = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2};$$

l'intégrale deviendra

$$(b) \qquad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(k\cos p)\sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

p désignant l'angle formé par les deux directions déterminées par les angles θ, ψ et θ', ψ'. Or $\sin\theta d\theta d\psi$ est l'élément de la surface sphérique décrite de l'origine comme centre avec l'unité pour rayon; et, d'après les limites des intégrales, on doit considérer successivement tous les éléments qui composent cette surface et les multiplier par la fonction $\mathrm{F}(k\cos p)$ qui dépend de l'angle que forment les rayons vecteurs relatifs à ces divers éléments, avec la direction fixe correspondante aux angles θ', ψ' déterminés par les équations

$$\cos\theta' = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\sin\theta'\cos\psi' = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\sin\theta'\sin\psi' = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Il est donc bien évident que l'intégrale proposée ne dé-

pend pas de la direction particulière des axes; et, pour simplifier le calcul, nous choisirons pour axe des x la direction fixe dont il vient d'être question. Nous aurons alors $p=\theta$, et l'expression (b) devient

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(k\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

En intégrant par rapport à ψ, on obtient

$$2\pi\int_0^\pi F(k\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

expression qui devient, en faisant $\cos\theta=\mu$,

$$2\pi\int_{-1}^{+1} F(k\mu)\, d\mu, \quad \text{ou} \quad 2\pi\int_{-1}^{+1} F\left(\mu\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right) d\mu,$$

de sorte que l'on a, quelle que soit la fonction F,

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\cos\theta+m\sin\theta\cos\psi+n\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi \\ &\qquad = 2\pi\int_{-1}^{+1} F\left(\mu\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right) d\mu. \end{aligned}\right.$$

Telle est la transformation que nous nous proposions de faire subir à l'expression (a).

155. Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Nous aurons une intégrale particulière en posant

$$u=e^{\alpha t+6x+\gamma y+\delta z},$$

α, 6, γ, δ étant liés par l'équation

$$\alpha=\pm a\sqrt{6^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Si l'on retranche les deux valeurs de u, correspondantes au double signe de α, et qu'on multiplie par un coefficient arbitraire, on aura encore une solution, qui pourra se mettre sous la forme suivante :

$$u = \mathrm{M}te^{6x+\gamma y+\delta z}\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{\alpha t} = \mathrm{M}te^{6x+\gamma y+\delta z}\int_{-1}^{+1} e^{\alpha t\mu}d\mu.$$

Si maintenant nous transformons l'intégrale $\int_{-1}^{+1} e^{\alpha t\mu}d\mu$ au moyen de la formule (c) du numéro précédent, cette valeur de u prendra la forme suivante, M étant une constante arbitraire :

$$u = \mathrm{M}te^{6x+\gamma y+\delta z}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{a6t\cos\theta+a\gamma t\sin\theta\cos\psi+a\delta t\sin\theta\sin\psi}\sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

ou

$$u = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}te^{6(x+at\cos\theta)}e^{\gamma(y+at\sin\theta\cos\psi)}e^{\delta(z+at\sin\theta\sin\psi)}\sin\theta d\theta d\psi.$$

Si l'on fait la somme d'une infinité d'expressions semblables dans lesquelles les constantes 6, γ, δ, M pourront prendre toutes les valeurs que l'on voudra, on aura encore une solution de l'équation (1). Mais la somme

$$\Sigma \mathrm{M}e^{6(x+at\cos\theta)}e^{\gamma(y+at\sin\theta\cos\psi)}e^{\delta(z+at\sin\theta\sin\psi)}\sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

peut, en choisissant convenablement les indéterminées M, 6, γ, δ, coïncider avec telle fonction qu'on voudra de $x+at\cos\theta$, $y+at\sin\theta\cos\psi$, $z+at\sin\theta\sin\psi$. On aura donc une solution de l'équation (1) en prenant

$$(2)\quad u=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta d\theta d\psi\, \mathrm{F}(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\cos\psi,\ z+at\sin\theta\sin\psi),$$

F désignant une fonction arbitraire de trois variables, et le coefficient $\frac{1}{4\pi}$ étant introduit afin que, pour $t=0$,

on trouve

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z).$$

L'expression (2) donne donc une solution de l'équation proposée, telle que pour $t = 0$ elle se réduit à 0, tandis que sa dérivée par rapport à t devient une fonction arbitraire de x, y, z.

Si donc nous pouvions trouver une autre solution de l'équation (1) telle, que pour $t = 0$ elle devînt égale à une fonction arbitraire de x, y, z, tandis que sa dérivée par rapport à t se réduirait à zéro, la somme de ces deux solutions formerait l'intégrale générale de l'équation proposée. Or, toute expression satisfaisant à l'équation (1) est telle, que sa dérivée par rapport à t y satisfait de même; prenant donc une expression semblable au second membre de l'équation (2), et substituant à la fonction F une autre fonction arbitraire f, puis différentiant le résultat par rapport à t, nous aurons cette nouvelle intégrale de l'équation (1)

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, f(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\psi,\ z + at\sin\theta\sin\psi).$$

Or il est facile de vérifier que cette expression devient $f(x, y, z)$ quand on fait $t = 0$; tandis que sa dérivée par rapport à t devient nulle.

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, \mathrm{F}(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\psi,\ z + at\sin\theta\sin\psi) \\ & + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, f(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\psi,\ z + at\sin\theta\sin\psi), \end{aligned}\right.$$

et, pour $t = 0$, on trouve

$$u = f(x, y, z),$$
$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z).$$

L'intégrale est donc mise sous la forme la plus commode, puisque les fonctions arbitraires qu'elle renferme sont précisément celles que l'on donne dans toutes les applications aux questions de mouvement. Ce sont celles qui déterminent l'état initial du système, c'est-à-dire celui qui correspond au temps t égal à zéro. C'est à Poisson qu'on doit la formule (3), qui est d'une très-grande utilité dans la physique mathématique.

156. L'intégrale que nous venons de trouver conduit à celle de l'équation plus générale

$$(4)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2}.$$

En effet, si l'on pose

$$x = ax',\quad y = by',\quad z = cz',$$

on obtient

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx'^2} + \frac{d^2u}{dy'^2} + \frac{d^2u}{dz'^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation sera donnée par la formule (3); et si l'on remplace ensuite x', y', z' par $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, on trouvera facilement

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, F(x+at\cos\theta, y+bt\sin\theta\cos\psi, z+ct\sin\theta\sin\psi) \\ & + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, f(x+at\cos\theta, y+bt\sin\theta\cos\psi, z+ct\sin\theta\sin\psi); \end{aligned}\right.$$

pour $t = 0$, on aura

$$u = f(x, y, z),$$
$$\frac{du}{dt} = F(x, y, z).$$

La formule (5) donne donc l'intégrale générale de l'équa-

tion (4), et les fonctions arbitraires qui y entrent sont données, comme dans le cas précédent, par l'état initial du système.

Élimination des fonctions arbitraires.

157. Si une équation à trois variables x, y, z renferme un nombre quelconque m de fonctions arbitraires de x seulement, il suffira de la différentier m fois par rapport à y, en considérant x comme constant; on aura ainsi $m+1$ équations dans lesquelles entreront les m fonctions à éliminer, sans qu'il se soit introduit aucune quantité qui en dépende; on pourra donc éliminer toutes ces fonctions, et l'on aura une équation aux différentielles partielles du $m^{ième}$ ordre.

158. Mais si les fonctions arbitraires renferment x, y et z, il ne suffira plus de différentier par rapport à une seule variable; et pour que l'élimination puisse se faire, il faut de plus que l'on n'ait que des fonctions arbitraires de fonctions déterminées de x, y, z.

Supposons, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad F[x, y, z, f(\varphi)] = 0,$$

φ étant une fonction connue de x, y, z, et f désignant une fonction arbitraire.

En différentiant l'équation par rapport à x et y successivement, on obtient, en posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}p + \frac{dF}{df}\cdot\frac{df}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p\right) = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}q + \frac{dF}{df}\cdot\frac{df}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q\right) = 0.$$

On a ainsi trois équations renfermant f et $\frac{df}{d\varphi}$. En les éli-

minant, on aura une équation aux différentielles partielles du premier ordre.

Si l'équation (1) avait été résolue par rapport à f, on n'aurait eu à éliminer que $\frac{df}{d\varphi}$ entre les deux équations dérivées.

159. Si l'équation donnée renfermait deux fonctions arbitraires $f(\varphi), f_1(\varphi_1)$ de fonctions données φ, φ_1, les deux différentiations du premier ordre introduiraient $\frac{df}{d\varphi}$, $\frac{df_1}{d\varphi_1}$, et les trois équations ne suffiraient pas pour l'élimination de ces deux fonctions, jointes à f et f_1.

On différentiera alors les équations du premier ordre par rapport à x et y successivement, et l'on aura trois nouvelles équations, et deux fonctions nouvelles à éliminer, savoir $\frac{d^2f}{d\varphi^2}$, $\frac{d^2f_1}{d\varphi_1^2}$. On a donc six équations et six quantités à éliminer; ce qui ne peut encore se faire.

En différentiant les équations du second ordre, on introduira $\frac{d^3f}{d\varphi^3}$, $\frac{d^3f_1}{d\varphi_1^3}$, et l'on obtiendra quatre nouvelles équations. Entre trois de ces dernières et les six précédentes on éliminera les deux fonctions f, f_1 et leurs dérivées jusqu'au troisième ordre; on aura ainsi une équation aux différentielles partielles du troisième ordre, dans laquelle il ne restera aucune trace des fonctions f et f_1, et qui exprimera un caractère commun à toutes les équations qui ne différeraient de la proposée que par la nature de ces fonctions.

160. En général, si une équation à trois variables renferme n fonctions arbitraires de fonctions déterminées de x, y, z, en la différentiant successivement par rapport à x et y jusqu'à l'ordre m inclusivement, on obtiendra un nombre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ d'équations, et $(m+1)\,n$ fonc-

tions à éliminer. Pour que cela puisse se faire, il faudra, en général, que l'on ait

$$\frac{m+2}{2} > n \quad \text{ou} \quad m > 2n - 2.$$

L'ordre de l'équation aux différentielles partielles sera donc $2n - 1$.

On agirait d'une manière analogue si le nombre des variables était supérieur à trois.

161. Si les fonctions f, f_1, etc., n'avaient pas renfermé x, y, z, d'une manière déterminée par les fonctions connues φ, φ_1, etc., on n'aurait pu les éliminer.

Si, par exemple, une équation à trois variables renfermait une fonction f entièrement arbitraire de x et y, on introduirait, pour chaque ordre de différentiation, autant de fonctions à éliminer que d'équations : l'élimination serait donc impossible.

Mais si l'équation proposée renfermait quatre variables x, y, z, u, en la différentiant par rapport à z seulement, on n'introduirait aucune nouvelle fonction; et par conséquent on pourrait éliminer autant de fonctions arbitraires de x et y, que l'on voudrait; de même qu'en partant d'une équation en x, y, z, nous avons vu qu'on pouvait éliminer des fonctions arbitraires de x.

Intégration générale de l'équation où les différentielles partielles n'entrent qu'au premier degré et au premier ordre.

162. Proposons-nous de trouver l'intégrale générale d'une équation entre des variables indépendantes en nombre quelconque, une fonction de ces variables et ses dérivées partielles, qui y entrent linéairement. Considérons, par exemple, une fonction u des trois variables indépen-

dantes x, y, z. L'équation donnée sera de la forme

$$(1) \qquad P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} = S,$$

P, Q, R, S étant des fonctions quelconques de x, y, z, u.

Si cette équation a une solution, comme nous le savons d'ailleurs, elle peut se mettre sous la forme $\varphi(x, y, z, u) = 0$, et l'on peut introduire la fonction φ au lieu de u, ce qui donnera à l'équation une forme symétrique qui nous sera très-avantageuse. On aura, en effet,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{du}}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{du}}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\frac{d\varphi}{du}},$$

et l'équation proposée devient

$$(2) \qquad P\frac{d\varphi}{dx} + Q\frac{d\varphi}{dy} + R\frac{d\varphi}{dz} + S\frac{d\varphi}{du} = 0.$$

Ainsi $\varphi = 0$ représentant une solution de la question, la fonction φ des quatre variables x, y, z, u, considérées comme indépendantes, doit satisfaire à cette équation; et réciproquement, toute fonction qui y satisfera donnera, en l'égalant à zéro, une fonction u de x, y, z qui satisfera à la proposée. Nous pouvons donc nous borner à chercher la fonction la plus générale de x, y, z, u qui satisfasse à l'équation (2); et c'est ce que nous ferons au moyen d'une remarque importante que nous avons faite sur les intégrales des équations différentielles simultanées. Nous avons démontré, en effet, que si l'on représente par $\psi(x, y, z, u) = C$ une quelconque des trois intégrales des équations simultanées

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = B, \quad \frac{du}{dx} = C,$$

on aura, quels que soient x, y, z, u,

$$\frac{d\psi}{dx} + A\frac{d\psi}{dy} + B\frac{d\psi}{dz} + C\frac{d\psi}{du} = 0;$$

donc la fonction ψ serait une solution de l'équation (2) si l'on prenait

$$A = \frac{Q}{P}, \quad B = \frac{R}{P}, \quad C = \frac{S}{P},$$

c'est-à-dire si ψ était une des intégrales, résolues par rapport aux constantes, du système

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{S}{P},$$

qu'on peut écrire sous la forme abrégée

$$(3) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{S}.$$

On peut même remarquer qu'une fonction arbitraire $F(\psi)$ de la fonction ψ satisferait encore à l'équation (2), puisque sa substitution ne ferait qu'introduire de plus le facteur $\frac{dF}{d\psi}$.

Si donc on représente les intégrales des équations (3) par

$$\psi(x, y, z, u) = C, \quad \psi_1(x, y, z, u) = C_1, \quad \psi_2(x, y, z, u) = C_2,$$

on aura des solutions de l'équation (2) en prenant une fonction arbitraire, soit de ψ, soit de ψ_1 ou ψ_2. Mais il est facile de voir qu'il en serait encore de même si l'on prenait une fonction arbitraire des trois, $F(\psi, \psi_1, \psi_2)$.

Car la substitution d'une pareille fonction au lieu de φ dans l'équation (2) donnerait la somme des résultats que fourniraient séparément ψ, ψ_1, ψ_2, pourvu qu'on multipliât le premier par $\frac{dF}{d\psi}$, le second par $\frac{dF}{d\psi_1}$, et le troisième

par $\frac{dF}{d\psi_2}$. On aura donc une solution de l'équation (2) ou de la proposée en posant $F(\psi, \psi_1, \psi_2) = 0$, ou, ce qui est la même chose,

$$(4) \qquad \psi_2 = f(\psi, \psi_1),$$

F et f représentant des fonctions complétement arbitraires. Il reste à démontrer que c'est là l'intégrale générale; ou, en d'autres termes, qu'en donnant à x une valeur particulière, zéro par exemple, on peut déterminer la fonction f de manière que u soit une fonction arbitraire de y et z.

Soit $\chi(y, z)$ une fonction choisie arbitrairement; cherchons si l'on peut déterminer f de manière que l'équation

$$(5) \qquad \psi_2(0, y, z, u) = f[\psi(0, y, z, u), \quad \psi_1(0, y, z, u)],$$

soit satisfaite, quels que soient y et z lorsqu'on remplace u par $\chi(y, z)$. Pour cela posons

$$(6) \quad \psi(0, y, z, u) = v, \quad \psi_1(0, y, z, u) = w, \quad \chi(y, z) = u,$$

et introduisons les variables indépendantes v et w au lieu de y, z; l'équation (5) devra avoir lieu quels que soient v et w, quand on y aura fait les substitutions fournies par les équations (6), qui donnent pour u, y, z des fonctions connues de v, w. Représentant par $\varpi(v, w)$ la fonction connue à laquelle se réduit le premier membre de l'équation (5), on aura alors à satisfaire, quels que soient v et w, à l'équation

$$\varpi(v, w) = f(v, w),$$

ce qui détermine la forme de la fonction f.

De quelque manière, au reste, qu'on élimine u, y, z, on obtiendra une équation qui renfermera la fonction f et la déterminera. L'équation (4) est donc l'intégrale générale de l'équation (1), puisqu'elle y satisfait, et que

pour $x = o$ elle donne pour u une fonction arbitraire de y et z.

Cette méthode, due à M. Jacobi, et que nous avons exposée sur une équation entre quatre variables, s'applique évidemment quel qu'en soit le nombre, et il serait superflu de rien ajouter à cet égard. Il ne nous reste qu'à en faire quelques applications.

Intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre, qui représentent des surfaces cylindriques, des surfaces coniques, des conoïdes et des surfaces de révolution.

163. Nous commencerons par rappeler les équations finies et les équations différentielles de ces surfaces.

Équations finies de ces surfaces.—Une surface cylindrique est celle qu'engendre une droite qui se meut parallèlement à une direction fixe, en s'appuyant constamment sur une ligne donnée, qui est nommée directrice.

Soient

$$F(x, y, z) = o, \qquad F_1(x, y, z) = o$$

les équations de la directrice, et

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + 6$$

celles d'une génératrice quelconque, a et b étant constants, et α, 6 variant d'une génératrice à une autre. La condition de la rencontre de cette génératrice et de la directrice s'obtiendra en éliminant x, y, z entre leurs équations; d'où résultera une équation de la forme

$$\varphi(\alpha, 6) = o.$$

On aura donc l'équation du lieu des génératrices en éliminant α, 6 entre cette équation et celles de la génératrice; ce qui donne, pour l'équation générale des surfaces cy-

lindriques, φ pouvant désigner une fonction quelconque,

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0,$$

ou, en la résolvant par rapport à $x - az$,

$$x - az = f(y - bz).$$

On peut d'ailleurs vérifier que, quelle que soit la fonction f, cette équation représente une surface cylindrique.

164. Une surface conique est celle qu'engendre une droite qui passe par un point fixe et s'appuie sur une ligne donnée.

Soient

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0$$

les équations de cette directrice, et α, 6, γ les coordonnées du point fixe; les équations d'une génératrice quelconque seront

$$x - \alpha = a(z - \gamma), \qquad y - 6 = b(z - \gamma),$$

a et b variant d'une génératrice à l'autre. Pour que la directrice soit toujours rencontrée par la génératrice, il faut que ces quatre équations aient lieu en même temps; d'où résulte, en éliminant x, y, z, l'équation de condition

$$\varphi(a, b) = 0.$$

L'équation du lieu des génératrices s'obtiendra en éliminant a et b entre cette équation et les deux précédentes; ce qui donne, pour l'équation générale des surfaces coniques,

$$\varphi\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma},\ \frac{y - 6}{z - \gamma}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = f\left(\frac{y - 6}{z - \gamma}\right):$$

et l'on vérifierait encore que, quelle que soit la fonction f, cette équation représente une surface conique.

165. Un conoïde est la surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à un plan fixe, et qui rencontre constamment une droite et une courbe données. Prenons la droite donnée pour axe des z, et le plan fixe pour plan des x et y, et soient

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0$$

les équations de la courbe donnée; celles de la génératrice seront de la forme

$$z = a, \qquad y = bx.$$

Éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on aura une équation entre a et b, qui exprime la dernière condition à laquelle la génératrice doit satisfaire. Soit $a = \varphi(b)$ cette équation, on aura celle de la surface cherchée, en éliminant a et b entre elle et les équations de la génératrice.

On trouve ainsi

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

La fonction φ est arbitraire, puisque F, F_1 désignent des fonctions quelconques. D'ailleurs on vérifie facilement que, quelle que soit cette fonction φ, l'équation précédente est celle d'un conoïde.

166. Une surface de révolution est celle qu'engendre une ligne quelconque qui tourne autour d'un axe fixe, en conservant avec lui la même position relative : de sorte que, dans ce mouvement, chaque point décrit un cercle dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

Prenons l'origine en un point de l'axe, et soient

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0$$

les équations de la génératrice dans une de ses positions; celles de l'axe seront de la forme

$$x = az, \qquad y = bz.$$

Un quelconque des cercles de la surface aura pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z + ax + by = C.$$

Pour qu'il y ait un point commun avec la courbe génératrice, il faudra que R et C satisfassent à l'équation qu'on obtiendra en éliminant x, y, z entre les quatre équations de ces lignes. Soit cette équation de condition

$$\varphi(R^2, C) = 0,$$

on aura celle du lieu des cercles ou de la surface de révolution, en éliminant R et C entre cette équation et celle d'un quelconque des cercles; on trouve ainsi

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2, z + ax + by) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(z + ax + by).$$

Si l'on transporte l'origine en un point quelconque dont les coordonnées, par rapport à la première, soient $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, l'équation générale des surfaces de révolution aura la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = f[z-\gamma + a(x-\alpha) + b(y-\beta)].$$

167. *Leurs équations aux différentielles partielles.* — Les surfaces cylindriques jouissent exclusivement de cette propriété, qu'en chacun de leurs points le plan tangent est parallèle à une droite fixe, dont la direction est celle des génératrices.

Soient $x = az$, $y = bz$ les équations qui déterminent cette direction, et $z = F(x, y)$ l'équation d'une surface.

Son plan tangent au point (x', y', z') aura pour équation

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Pour qu'il soit parallèle à la droite donnée, quel que soit le point de contact, il faudra qu'on ait

$$1 = a\frac{dz'}{dx'} + b\frac{dz'}{dy'}.$$

L'équation générale des surfaces cylindriques est donc

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

168. La propriété caractéristique des surfaces coniques est que leur plan tangent en un point quelconque passe par un point fixe. Soient α, β, γ les coordonnées de ce point; l'équation générale du plan tangent à une surface étant

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y'),$$

le plan tangent passera constamment par le point fixe, si l'on a, pour tous les points de la surface,

$$\gamma - z' = \frac{dz'}{dx'}(\alpha - x') + \frac{dz'}{dy'}(\beta - y');$$

l'équation générale des surfaces coniques est donc

$$(x - \alpha)\frac{dz}{dx} + (y - \beta)\frac{dz}{dy} = z - \gamma.$$

169. Le plan tangent à un conoïde devant contenir la génératrice menée au point de contact, coupera l'axe des z en un point dont le z sera égal à celui du point de contact, si l'on suppose les axes choisis comme précédem-

ment. L'équation du plan tangent

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y')$$

devra donc être satisfaite par $x = 0$, $y = 0$, $z = z'$; ce qui donne, pour tout point de la surface,

$$x'\frac{dz'}{dx'} + y'\frac{dz'}{dy'} = 0.$$

L'équation générale de tous les conoïdes, quelle que soit la courbe directrice, est donc

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0.$$

170. Les surfaces de révolution ont pour propriété caractéristique, que la normale menée en un quelconque de leurs points rencontre leur axe.

Soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

les équations de l'axe. Une normale à une surface quelconque a pour équations

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \qquad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0;$$

pour qu'elle rencontre l'axe, il faudra que l'on ait la condition

$$\frac{x' - \alpha + z'\frac{dz'}{dx'}}{\frac{dz'}{dx'} + a} = \frac{y' - \beta + z'\frac{dz'}{dy'}}{\frac{dz'}{dy'} + b}.$$

En réduisant cette équation, et supprimant les accents, on aura l'équation générale des surfaces de révolution, qui sera

$$(y - bz - \beta)\frac{dz}{dx} - (x - az - \alpha)\frac{dz}{dy} = b(x - \alpha) - a(y - \beta).$$

On aurait pu déduire ces diverses équations différentielles des équations en quantités finies, en éliminant la fonction arbitraire.

Nous allons voir réciproquement comment on peut repasser des équations différentielles aux équations en quantités finies.

171. *Intégration des équations de ces surfaces. Surfaces cylindriques.* — L'équation différentielle des surfaces cylindriques est, en posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$,

$$ap + bq = 1.$$

D'après la théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre, on posera les deux équations simultanées

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = dz,$$

dont les intégrales sont $x - az = C$, $y - bz = C_1$; d'où il résulte que l'intégrale de l'équation proposée est

$$x - az = F(y - bz),$$

F désignant une fonction arbitraire, qui se déterminera par une condition particulière. Supposons d'abord que la surface cylindrique soit assujettie à passer par une courbe donnée, ayant pour équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0;$$

pour qu'il soit plus facile de déterminer la forme de la fonction F, nous représenterons par une seule lettre la quantité qui s'y trouve soumise. Soit donc

$$y - bz = u;$$

nous remplacerons partout y par $bz + u$: l'équation de la

surface deviendra

$$x - az = F(u),$$

et celles de la courbe se changeront en

$$f(x, bz + u, z) = 0, \qquad f_1(x, bz + u, z) = 0,$$

et il faudra que ces trois équations soient satisfaites par une infinité de valeurs de x, z, u. Si donc on élimine x et z entre elles, l'équation en u devra être satisfaite, quel que soit u, ou, en d'autres termes, elle devra être identique. On en déduira donc la forme de la fonction F, en tirant de cette équation la valeur de $F(u)$. L'équation de la surface

$$x - az = F(y - bz)$$

sera donc entièrement déterminée.

On peut, du reste, se dispenser de résoudre, par rapport à F, l'équation résultante de l'élimination. Car soit

$$\varphi[u, F(u)] = 0$$

cette équation ; en y remplaçant u par $y - bz$ et $F(u)$ par $x - az$, on aura, pour l'équation de la surface proposée,

$$\varphi(y - bz, x - az) = 0.$$

Si la surface cylindrique était assujettie à être circonscrite à une surface donnée, on commencerait par déterminer les points de cette surface pour lesquels le plan tangent est parallèle à la direction donnée des génératrices, et il suffira, pour cela, d'exprimer qu'ils satisfont à l'équation différentielle de la surface cylindrique. Cette ligne étant déterminée, le problème rentre dans le précédent.

172. *Surfaces coniques.* — Leur équation différentielle est

$$(x - \alpha)p + (y - \beta)q = z - \gamma.$$

On intégrera d'abord les équations

$$\frac{dx}{x-\alpha} = \frac{dy}{y-6} = \frac{dz}{z-\gamma},$$

ce qui conduit à

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = C, \quad \frac{y-6}{z-\gamma} = C_1,$$

et l'intégrale de l'équation proposée sera

$$\frac{x-a}{z-\gamma} = f\left(\frac{y-6}{z-\gamma}\right),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Supposons, pour la déterminer, que la surface soit assujettie à passer par une courbe dont les équations données soient

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

on posera

$$\frac{y-6}{z-\gamma} = u;$$

les équations de la surface et de la ligne donnée deviendront

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = f(u), \quad F[x, 6+(z-\gamma)\,u, z] = 0, \quad F_1[x, 6+(z-\gamma)u, z] = 0.$$

Ces trois équations devant avoir une infinité de solutions communes, si l'on élimine x et z, l'équation finale en u devra être identique, et la valeur que l'on en tirera pour $f(u)$ déterminera la forme de la fonction arbitraire.

Si la surface conique était assujettie à être circonscrite à une surface donnée, on chercherait d'abord le lieu des points de cette surface qui satisfont à l'équation différentielle de la surface conique : le problème rentre alors dans celui que nous venons de résoudre.

173. *Conoïdes.* — L'équation générale des conoïdes est

$$px + qy = 0.$$

Les équations simultanées qu'il faut intégrer sont donc

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{0} \quad \text{ou} \quad dz = 0.$$

On en tire $z = a$, $y = bx$, a et b étant les constantes arbitraires. L'intégrale générale sera donc

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

Si l'on veut déterminer cette fonction par la condition que la surface contienne une courbe ayant pour équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

on posera $\frac{y}{x} = u$, et l'on remplacera y par ux dans les trois équations qui devront admettre une infinité de solutions communes.

On aura ainsi

$$z = \varphi(u), \quad F(x, ux, z) = 0, \quad F_1(x, ux, z) = 0.$$

Si l'on élimine x et z, l'équation identique en u qui en résultera fera connaître la forme de la fonction cherchée $\varphi(u)$.

On agirait comme dans les deux cas précédents, si le conoïde devait être circonscrit à une surface donnée.

174. *Surfaces de révolution.* — L'équation différentielle de ces surfaces est, en prenant l'origine en un point de l'axe,

$$(y - bz)p - (x - az)q = bx - ay.$$

Il faudra d'abord intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{y - bz} = \frac{-dy}{x - az} = \frac{dz}{bx - ay},$$

ou

$$(bx - ay)\,dx = (y - bz)\,dz,$$
$$-(bx - ay)\,dy = (x - az)\,dz.$$

Si l'on multiplie la première par a, la seconde par b, et qu'on les retranche, on trouve, en divisant par $bx - ay$,

$$adx + bdy = - dz,$$

d'où

$$z + ax + by = c.$$

Si maintenant on multiplie la première par x, la seconde par y, et qu'on les ajoute, on trouvera

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1;$$

l'intégrale de l'équation proposée est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(z + ax + by).$$

Déterminons la fonction arbitraire, par la condition que la surface contienne la courbe ayant pour équations

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \quad \mathrm{F}_1(x, y, z) = 0;$$

pour cela, nous poserons encore

$$z + ax + by = u,$$

et nous éliminerons, comme dans les questions précédentes, x, y, z entre cette équation, celle de la surface et celles de la courbe donnée; l'équation finale en u devra être identique, et déterminera ainsi la fonction $f(u)$.

On agirait comme dans les cas précédents, si l'on demandait que la surface de révolution fût circonscrite à une surface donnée.

Calcul des variations.

175. Le calcul des variations a été conçu par Lagrange pour la résolution d'une nouvelle espèce de questions sur les maxima et minima.

Dans les questions ordinaires, on donne la forme d'une expression qui renferme une ou plusieurs quantités inconnues, et l'on cherche les valeurs maxima de cette expression, ainsi que les valeurs particulières des inconnues qui y correspondent.

Dans ces nouvelles questions, on donne l'expression d'une différentielle qui renferme des fonctions inconnues de x, ainsi que leurs dérivées d'un ordre quelconque par rapport à x, et l'on se propose de déterminer ces fonctions de telle sorte que l'intégrale, prise entre certaines limites, ait une valeur maximum ou minimum.

Ainsi la différence que l'on aperçoit d'abord entre ces questions et les autres questions de maxima ou minima consiste en ce que les inconnues ne sont pas des valeurs déterminées, mais des fonctions de la variable par rapport à laquelle l'intégration doit être effectuée.

176. La marche à suivre pour résoudre ces sortes de questions est la même que pour les autres. On suppose que l'on connaisse les fonctions cherchées, on les fait varier infiniment peu, en satisfaisant à toutes les conditions; et l'on exprime que, dans tous les cas, la valeur de l'intégrale diminue, si elle doit être maximum, ou qu'elle augmente, si elle doit être minimum.

Il faut donc commencer par donner les règles générales au moyen desquelles on peut déterminer l'accroissement infiniment petit des intégrales, et d'abord des quantités qui peuvent entrer sous le signe de l'intégration. Mais, avant de nous en occuper, nous allons éclaircir ce qui

précède par la considération d'une question particulière.

177. *Étant donnés deux points fixes et une droite située dans le même plan, quelle est la courbe passant par ces deux points, qui, tournant autour de la droite fixe, engendre une surface minimum?*

Si l'on prend cette droite pour axe des x, qu'on partage en une infinité de parties la distance des projections des deux points, et que par les points de division on mène des plans perpendiculaires à l'axe, la surface engendrée sera décomposée en une infinité d'éléments, ayant pour expression générale $2\pi y ds$, et correspondants à toutes les valeurs de x comprises entre les limites données x_1, x_2. Il faudra donc que l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} y ds$ augmente en passant de la courbe cherchée à toute autre voisine. Et dans l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} y' ds'$, qui se rapporte à une quelconque d'entre elles, les éléments $y' ds'$ peuvent se rapporter à des points de division de l'axe qui ne soient pas les mêmes que pour la première; il suffit que les limites soient les mêmes. De sorte que, si l'on voulait comparer les deux intégrales élément par élément, il suffirait d'en mettre le même nombre de part et d'autre, et l'on pourrait établir telle loi que l'on voudrait entre les abscisses de deux éléments correspondants; mais il sera avantageux de les supposer infiniment peu différentes l'une de l'autre.

Les limites x_1, x_2 pourraient être inconnues, mais assujetties à certaines conditions. On pourrait, par exemple, demander quelle est la courbe qui, ayant ses extrémités sur deux courbes données, et tournant autour d'une droite située dans le même plan, engendre une surface minimum. Dans ce cas, on reconnaîtrait qu'on a trouvé la courbe qui résout la question, à ce que l'intégrale

$\int_{x_1}^{x_2} y ds$ augmenterait quand on considérerait toute autre courbe ayant ses points infiniment voisins de la première, et ses deux extrémités sur les courbes données, à une distance infiniment petite des extrémités de la première.

Si l'on veut comparer deux à deux les éléments des deux intégrales depuis le premier jusqu'au dernier, on ne pourrait, dans ce cas, les supposer correspondants à la même abscisse, puisque les abscisses des extrémités sont nécessairement différentes. Il est donc quelquefois nécessaire, et toujours permis, de considérer les deux intégrales que l'on veut comparer, comme décomposées en un même nombre d'éléments correspondants à des valeurs de x infiniment peu différentes, et liées l'une à l'autre par une loi arbitraire.

Des variations.

178. Lorsque l'on considère un élément quelconque d'une intégrale, et que l'on passe à son correspondant, les accroissements que subissent les quantités dont il dépend sont nommés les *variations* de ces quantités. On conserve le nom de *différentielles* aux accroissements que subissent ces mêmes quantités en restant toujours dans le système qui se rapporte à la même intégrale. On distingue les variations des différentielles par la caractéristique δ que l'on substitue à la caractéristique d, et on les suppose toujours infiniment petites.

Ainsi, soit y une des fonctions inconnues de x qui entrent dans l'expression sous le signe $\int$; δy sera l'accroissement que prend cette fonction quand on passe d'un élément de la première intégrale à son correspondant dans la seconde. En considérant y comme étant l'ordonnée

d'une courbe, $y + \delta y$ sera l'ordonnée de la courbe après sa variation, et elle correspondra à la même abscisse que y dans la première, dans le cas où les points correspondants se rapporteront à la même valeur de x; au contraire, $y + \delta y$ sera l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x + \delta x$ si δx est la fonction infiniment petite de x, et continue comme δy, qui exprime la différence des abscisses des points que l'on fait se correspondre dans les deux intégrales. Dans ce dernier cas, il est peut-être plus commode de regarder x et y, ainsi que δx, δy, comme des fonctions d'une même variable arbitraire t qui n'entre même nullement dans l'expression donnée, et alors la fonction sous le signe $\int$ renfermera les différentielles dx, d^2x,..., aussi bien que dy, d^2y,..., rapportées toutes à une même variable qui n'a pas même besoin d'être désignée.

Lorsque l'on connaît les variations de toutes les quantités qui entrent dans une fonction, la variation de cette fonction se détermine par les règles ordinaires du calcul différentiel, qui font connaître l'accroissement infiniment petit d'une fonction, d'après les accroissements de toutes les variables qu'elle renferme. Ainsi l'on aura généralement

$$(1) \qquad \delta F(u, v, w, \ldots) = \frac{dF}{du}\delta u + \frac{dF}{dv}\delta v + \frac{dF}{dw}\delta w + \ldots.$$

179. *Transposition des caractéristiques d et δ.* — Il est important de remarquer que dans tous les cas on peut intervertir l'ordre des opérations quand on prend la différentielle et la variation d'une fonction quelconque v. En effet, soit $v + \delta v$ ce que devient la fonction v en passant du premier système au second. Si l'on change t en $t + dt$, la différentielle $n^{ième}$ de la fonction dans le second système sera $d^n v + d^n \delta v$. Donc la différentielle $d^n v$ de la fonction dans le premier système a pour variation $d^n \delta v$; on a

donc

(2) $$\delta d^n v = d^n \delta v.$$

Par là les variations de toutes les différentielles d'une fonction sont déterminées par la variation de la fonction elle-même, et il en résulte qu'on peut exprimer la variation d'une fonction quelconque de x, y, z,... et de leurs différentielles, au moyen des variations de ces quantités x, y, z, et des différentielles de ces variations. Il suffira de faire usage de la formule (1), dans laquelle u, v, w,... seront remplacés par x, y, z,..., dx, dy, dz,..., d^2x, d^2y, d^2z,....

Ainsi, en représentant par A, B, C,..., A_1, B_1, C_1,..., A_2, B_2, C_2,..., les dérivées partielles par rapport à ces quantités x,..., dx,..., d^2x,..., d'une fonction

$$F(x, y, z, \ldots, dx, dy, dz, \ldots, d^2x, d^2y, \ldots),$$

on aura

(3) $$\left\{\begin{array}{l} \delta F = A\delta x + B\delta y + C\delta z + \ldots + A_1 d\delta x + B_1 d\delta y + C_1 d\delta z + \ldots \\ \qquad + A_2 d^2\delta x + B_2 d^2\delta y + \ldots . \end{array}\right.$$

180. Mais il arrive souvent que les différentielles sont toutes prises par rapport à une variable particulière qui entre dans la question; alors les expressions que l'on a à considérer ne renferment que les dérivées de toutes les autres par rapport à celle-là, et l'on a besoin de calculer les variations de ces dérivées. On pourrait bien les déduire de la variation des différentielles, en exprimant d'abord ces dérivées en différentielles prises par rapport à une variable indépendante quelconque; mais il vaut mieux traiter la question directement.

Soit y une fonction de x, que nous pouvons nous représenter (*fig.* 2) comme l'ordonnée d'une courbe dont x serait l'abscisse. Représentons par Y et X ce que de-

viennent y et x; la différence $\frac{d^nY}{dX^n} - \frac{d^ny}{dx^n}$ sera la variation de $\frac{d^ny}{dx^n}$, ou $\delta\frac{d^ny}{dx^n}$, et il s'agit de l'exprimer au moyen des variations de x et y et des dérivées de ces variations. Il y a deux cas à examiner, suivant que X est identique avec x, ou qu'il en diffère.

1°. Supposons que X ne diffère pas de x, ou que l'on ait $\delta x = 0$, c'est-à-dire que nous regardions comme correspondants sur deux courbes infiniment voisines les points M, N, qui répondent à une même abscisse quelconque AP; MN sera δy, et, en différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation $Y = y + \delta y$, on obtiendra

$$\frac{d^nY}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^n\delta y}{dx^n};$$

d'où résulte

$$\delta\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n\delta y}{dx^n}. \tag{4}$$

2°. Supposons maintenant que les points correspondants M et N (*fig.* 3) aient des abscisses différentes AP, AQ; on aura

$$AP = x,\quad MP = y,\quad AQ = X,\quad NQ = Y,\quad PQ = \delta x,\quad NK = \delta y,$$

et lorsque x croîtra par degrés égaux, X ne croîtra pas par degrés égaux, puisque $X = x + \delta x$, et que δx est une fonction, soit de x, soit d'une variable indépendante, arbitrairement choisie. Ainsi, différentier par rapport à x ou à X ne sera pas la même opération, et l'équation

$$Y = y + \delta y$$

ne conduirait pas, comme dans le cas précédent, à

$$\frac{d^nY}{dX^n} = \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^n\delta y}{dx^n}.$$

Ce n'est pas non plus le cas d'appliquer la formule (3), parce que d^nY et d^ny ne se rapportent plus aux accroissements égaux de la même variable. Il faut donc calculer directement la différence $\frac{d^nY}{dX^n} - \frac{d^ny}{dx^n}$.

Désignons par u l'ordonnée M'P de la courbe variée, pour la même abscisse x que l'y de la première courbe, qui est MP, et par ω la différence M'M, qui serait δy si l'on supposait $\delta x = 0$. On aura alors $u = \omega + y$; et, en observant qu'on peut considérer Nm et M'M comme égaux, et que $m\text{K} = \frac{dy}{dx}\delta x$, on aura

$$\delta y = \omega + \frac{dy}{dx}\delta x.$$

Différentiant n fois l'équation

$$u = \omega + y,$$

on obtiendra

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^n\omega}{dx^n} + \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Mais les points M' et N appartenant à la même courbe, les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des ordonnées de ces deux points par rapport à leurs abscisses respectives x et X ne sont autre chose que des valeurs d'une même fonction dans laquelle on met successivement pour la variable les deux valeurs différentes AP, AQ, ou x et $x + \delta x$; d'où résulte, d'après les règles du calcul différentiel,

$$\frac{d^nY}{dX^n} = \frac{d^nu}{dx^n} + \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\delta x,$$

et, d'après l'équation précédente,

$$\frac{d^nY}{dX^n} = \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^n\omega}{dx^n} + \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\delta x.$$

Observant d'ailleurs que $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}$ ne diffère de $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ que d'une quantité infiniment petite, cette équation donnera, pour la différence $\frac{d^n Y}{dX^n} - \frac{d^n y}{dx^n}$, ou $\delta \frac{d^n y}{dx^n}$, la valeur suivante :

$$(5) \qquad \delta \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \omega}{dx^n} + \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \delta x,$$

que nous regarderons comme renfermant la première,

$$\delta y = \omega + \frac{dy}{dx} \delta x.$$

Les formules (5) et (4) coïncideront lorsque l'on supposera $\delta x = 0$.

181. *Transposition des caractéristiques δ et $\int$.* — Considérons maintenant l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} U$, U désignant une expression différentielle, et les limites x_1, x_2 étant constantes ou variables. On peut la décomposer en une infinité d'éléments, dont le premier correspond à x_1 et le dernier à x_2 diminué de la dernière différentielle de x. Elle sera donc la limite d'une somme telle que

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_m.$$

Considérons maintenant l'intégrale infiniment voisine dans laquelle elle se change par la variation des quantités dont elle dépend, et soit U′ ce que devient U en général dans ce changement, de sorte que $U' - U = \delta U$. Les limites de cette nouvelle intégrale seront $x_1 + \delta x_1$ et $x_2 + \delta x_2$, et elle pourra être regardée comme la limite de

$$U'_1 + U'_2 + U'_3 + \ldots + U'_m,$$

ces nouveaux éléments correspondant à chacun des premiers.

L'accroissement de l'intégrale est donc la limite de

$$(U'_1 - U_1) + (U'_2 - U_2) + \ldots + (U'_m - U_m),$$

ou de

$$\delta U_1 + \delta U_2 + \ldots + \delta U_m,$$

c'est-à-dire $\int_{x_1}^{x_2} \delta U$.

Ainsi, soit qu'on suppose les limites x_1, x_2 constantes, soit qu'on les suppose variables, on a

$$(6) \qquad \delta \int_{x_1}^{x_2} U = \int_{x_1}^{x_2} \delta U;$$

de sorte, que pour connaître la variation d'une intégrale définie, il suffit de calculer celle de la différentielle, et de l'intégrer entre les mêmes limites.

182. *Expression de la variation d'une intégrale définie.* — Considérons une intégrale de la forme

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

la valeur de V étant

$$V = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)});$$

y désigne une fonction inconnue de x, et $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sont les dérivées successives par rapport à x. Nous nous bornons à considérer une seule fonction y, parce que, s'il y en avait plusieurs autres, il suffirait de reproduire pour chacune ce que nous allons faire pour y. Nous examinerons deux cas distincts : celui où x_1, x_2 ont des valeurs fixes données, et celui où ces limites peuvent varier d'après certaines conditions données.

1°. Supposons d'abord x_1 et x_2 constants; nous pourrons alors faire $\delta x = 0$ et employer la formule (4) qui donne pour une dérivée quelconque $y^{(m)}$

$$\delta y^{(m)} = \frac{d^m \delta y}{dx^m}.$$

Cela posé, si l'on observe que la variation de x ou δx est nulle, et que, par conséquent, celle de dx ou $d\delta x$ l'est aussi, d'où il suit que $\delta(\mathrm{V}dx) = \delta \mathrm{V}.dx$, la formule (6) donnera

$$(7) \qquad \delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta \mathrm{V}.dx.$$

Calculons maintenant δV.

Or, comme nous l'avons déjà remarqué, l'accroissement de V sera donné par les règles ordinaires du calcul différentiel, au moyen des accroissements des quantités qui ont varié dans V, c'est-à-dire de $y, y', \ldots, y^{(n)}$. On aura donc

$$\delta \mathrm{V} = \frac{d\mathrm{V}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\delta y' + \frac{d\mathrm{V}}{dy''}\delta y'' + \ldots + \frac{d\mathrm{V}}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)},$$

que nous écrirons, pour plus de commodité, de la manière suivante :

$$\delta \mathrm{V} = \mathrm{M}\delta y + \mathrm{N}\delta y' + \mathrm{P}\delta y'' + \mathrm{Q}\delta y''' + \ldots + \mathrm{U}\delta y^{(n)}.$$

L'équation (7) deviendra ainsi, en exprimant $\delta y', \ldots, \delta y^{(n)}$ au moyen de la formule (4),

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\mathrm{M}\delta y + \mathrm{N}\frac{d\delta y}{dx} + \mathrm{P}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \mathrm{Q}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \ldots + \mathrm{U}\frac{d^n\delta y}{dx^n} \right) dx.$$

Nous avons, sous le signe $\int$, la fonction indéterminée δy et ses dérivées par rapport à x; ces dernières sont déter-

minées par δy, et il est nécessaire de les faire disparaître de l'intégrale en les ramenant à δy seul, qui est entièrement arbitraire. Or, c'est ce que l'on fera facilement au moyen de l'intégration par parties.

En effet, si l'on désigne par u et v deux fonctions de x, on établit facilement, par une suite d'intégrations par parties, la formule suivante, qui est souvent utile dans l'analyse :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\int u\frac{d^n v}{dx^n}dx = u\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} - \frac{du}{dx}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} \\ - \frac{d^3u}{dx^3}\frac{d^{n-4}v}{dx^{n-4}} + \ldots \mp \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}v \pm \int \frac{d^n u}{dx^n} v dx.\end{aligned}\right.$$

En faisant usage de cette formule, on obtiendra les équations suivantes :

$$\int N\frac{d\delta y}{dx}dx = N dy - \int \delta y \frac{dN}{dx}dx,$$

$$\int P\frac{d^2\delta y}{dx^2}dx = P\frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP}{dx}\delta y + \int \delta y\frac{d^2P}{dx^2}dx,$$

$$\int Q\frac{d^3\delta y}{dx^3}dx = Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{dQ}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\delta y - \int \delta y\frac{d^3Q}{dx^3}dx,$$

. . . .

$$\begin{aligned}\int U\frac{d^n\delta y}{dx^n}dx = U\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} - \frac{dU}{dx}\frac{d^{n-2}\delta y}{dx^{n-2}} + \frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^{n-3}\delta y}{dx^{n-3}} - \ldots \\ \mp \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}\delta y \pm \int \delta y\frac{d^nU}{dx^n}dx,\end{aligned}$$

et il faut bien remarquer que $\frac{dN}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, ..., représentent les dérivées totales de N, P,..., considérées comme fonctions de x, et dans lesquelles on regarde y comme dépendant de x. On aura donc enfin, en prenant les intégrales

entre x_1 et x_2,

$$(9)\left\{\begin{aligned}\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = &\left\{\begin{aligned}&\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\ldots \pm \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}\right)\delta y\\ &+\left(P - \frac{dQ}{dx}\ldots \mp \frac{d^{n-2}U}{dx^{n-2}}\right)\frac{d\delta y}{dx}\\ &+\left(Q - \frac{dR}{dx}\ldots \pm \frac{d^{n-3}U}{dx^{n-3}}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+U\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\end{aligned}\right\}_{x_1}^{x_2}\\ &+\int_{x_1}^{x_2}\delta y\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^nU}{dx^n}\right)dx.\end{aligned}\right.$$

S'il y avait une seconde fonction z dans V, on ajouterait au second membre de cette équation une autre expression qui n'en différerait que par les valeurs des fonctions qui remplaceraient N, P,..., et par le changement de y en z. Il en serait de même pour un nombre quelconque de fonctions.

183. Si la fonction V renfermait les valeurs de $y, y', \ldots$, relatives aux limites, la variation de l'intégrale se composerait des termes que nous venons de calculer, plus les suivants :

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dy'_1}\delta y'_1 + \ldots + \frac{dV}{dy_2}\delta y_2 + \frac{dV}{dy'_2}\delta y'_2 + \ldots\right)dx.$$

Or, les quantités δy_1, $\delta y'_1, \ldots$, δy_2, $\delta y'_2, \ldots$ n'étant pas des fonctions de x, on pourrait les faire passer hors du signe $\int$, et les termes à ajouter se réduiraient à

$$\delta y_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dy_1}dx + \delta y'_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dy'_1}dx + \ldots + \delta y_2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dy_2}dx + \ldots.$$

2°. Supposons, en second lieu, que x_1, x_2 soient va-

riables, et que δx ne soit pas nul. On aura, dans ce cas,

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \int_{x_1}^{x_2}\delta(\mathrm{V}\delta x) = \int_{x_1}^{x_2}(\delta\mathrm{V}.dx + \mathrm{V}d\delta x).$$

L'intégration par parties donnant

$$\int \mathrm{V}d\delta x = \mathrm{V}\delta x - \int \delta x . d\mathrm{V},$$

l'équation précédente devient

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \left(\mathrm{V}\delta x\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}(\delta\mathrm{V}.dx - d\mathrm{V}.\delta x).$$

Soit maintenant

$$d\mathrm{V} = \mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dy' + \mathrm{P}dy'' + \mathrm{Q}dy''' + \ldots,$$

et, par suite,

$$\delta\mathrm{V} = \mathrm{L}\delta x + \mathrm{M}\delta y + \mathrm{N}\delta y' + \mathrm{P}\delta y'' + \mathrm{Q}\delta y''';$$

il en résultera

$$\delta\mathrm{V}.dx - d\mathrm{V}.\delta x = dx\left[\mathrm{M}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + \mathrm{N}\left(\delta y' - \frac{dy'}{dx}\delta x\right) + \ldots\right],$$

ou, en vertu de la formule (5),

$$\delta\mathrm{V}.dx - d\mathrm{V}.\delta x = dx\left(\mathrm{M}\omega + \mathrm{N}\frac{d\omega}{dx} + \mathrm{P}\frac{d^2\omega}{dx^2} + \mathrm{Q}\frac{d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right).$$

On a donc, pour l'expression de la variation cherchée,

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}\,dx = \left(\mathrm{V}\delta x\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\mathrm{M}\omega + \mathrm{N}\frac{d\omega}{dx} + \mathrm{P}\frac{d^2\omega}{dx^2} + \mathrm{Q}\frac{d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right)dx.$$

On peut remarquer que cette expression ne diffère de celle du cas précédent que par l'addition du terme $\left(\mathrm{V}\delta x\right)_{x_1}^{x_2}$; car ω désigne ici ce que δy désignait dans l'autre. Si donc on appliquait semblablement l'intégra-

tion par parties, on ferait disparaître tous les indices de différentiation sur ω sous le signe $\int$, et l'on trouverait

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = & \left(\begin{aligned} &\mathrm{V}\delta x + \left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}\ldots\right)\omega \\ &\quad + \left(\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\ldots\right)\frac{d\omega}{dx} \\ &\quad + \left(\mathrm{Q} - \frac{d\mathrm{R}}{dx}\ldots\right)\frac{d^2\omega}{dx^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \mathrm{U}\frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}} \end{aligned} \right)_{x_1}^{x_2} \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \omega\left(\mathrm{M} - \frac{d\mathrm{N}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2} - \frac{d^3\mathrm{Q}}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^n\mathrm{U}}{dx^n}\right)dx. \end{aligned} \right.$$

S'il se trouvait dans V une seconde fonction inconnue z, $d\mathrm{V}$ renfermerait de plus des termes de la forme $\mathrm{M}'z' + \mathrm{N}'z'' + \mathrm{P}'z''' + \ldots$. On poserait

$$\delta z - z'\delta x = \omega',$$

et l'on ajouterait à l'expression précédente des termes où ω' entrerait de la même manière que ω. Il en serait de même, quel que fût le nombre de ces fonctions.

Enfin, si V renfermait les valeurs de $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots,$ relatives aux limites, on y ajouterait les termes suivants :

$$(11)\quad \delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathrm{V}}{dx_1}dx + \delta y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathrm{V}}{dy_1}dx + \ldots + \delta x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathrm{V}}{dx_2}dx + \ldots.$$

184. Le cas où x_1, x_2 sont variables pourrait être immédiatement ramené à celui où ils sont fixes, sans faire usage de la formule (5).

En effet, considérons V comme l'ordonnée d'une courbe MN (*fig.* 4), et soient $\mathrm{AP} = x_1$, $\mathrm{AQ} = x_2$; on aura

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \mathrm{PMNQ}.$$

Soit maintenant M_1N_1 la courbe après la variation; la valeur de l'intégrale proposée sera, dans le second système, l'aire $P_1M_1N_1Q_1$: on peut donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre, regarder la variation de l'intégrale comme égale à

$$NQQ_1K - MPP_1H + M_1LNI.$$

Les deux premiers termes représentent

$$V_2\delta x_2 - V_1\delta x_1, \quad \text{ou} \quad \left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2}.$$

Le troisième est l'intégrale $\int \delta V . dx$ prise entre les limites $x_1 + \delta x_1$ et x_2, ou, en négligeant un infiniment petit du second ordre, entre x_1 et x_2. Donc enfin

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta V . dx,$$

δV étant la variation de V dans l'hypothèse $\delta x = 0$, et par conséquent ayant la même signification que dans le premier cas. Son expression sera donc la même; seulement il conviendra de représenter la variation de y autrement que par δy, qui, dans le cas actuel, aurait une autre signification, et nous désignerons par ω la variation de y dans l'hypothèse $\delta x = 0$. Il suffira donc, pour obtenir la variation cherchée de l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} V dx$, d'ajouter $\left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2}$ au second membre de l'équation (9), dans lequel on remplacera δy par ω.

On retombe ainsi sur la formule (10), comme cela devait être. On y ajouterait de même l'expression (11), si V renfermait explicitement les valeurs des variables aux limites.

185. Il nous reste à examiner le cas où la variable indépendante ne serait pas désignée, et où la fonction sous le signe $\int$ ne renfermerait pas, par conséquent, des dérivées par rapport à x, mais des différentielles prises par rapport à une variable arbitraire qui n'entre pas dans la question, et n'est nullement désignée. Soit donc proposé de trouver $\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}$, en supposant

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(x,\ dx,\ d^2x, \ldots,\ y,\ dy,\ d^2y, \ldots).$$

Les limites x_1 et x_2 étant fixes ou variables, on a toujours, comme nous l'avons démontré,

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U} = \int_{x_1}^{x_2} \delta\mathrm{U},$$

et, pour une variable quelconque u,

$$\delta d^n u = d^n \delta u.$$

Cela posé, désignons par L, M, N, P,... les dérivées partielles de U par rapport aux quantités x, dx, d^2x, d^3x,..., et par L', M', N', P',... ses dérivées partielles par rapport à y, dy, d^2y, d^3y,..., on pourra exprimer $\delta\mathrm{U}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{U} &= \mathrm{L}\delta x + \mathrm{M}\delta dx + \mathrm{N}\delta d^2x + \mathrm{P}\delta d^3x + \ldots\\ &\quad + \mathrm{L}'\delta y + \mathrm{M}'\delta dy + \mathrm{N}'\delta d^2y + \mathrm{P}'\delta d^3y + \ldots.\end{aligned}$$

Il est inutile de faire remarquer que les diverses quantités L, M,..., L', M',..., ne sont pas du même ordre infinitésimal, et que le second facteur de chaque terme rétablit l'homogénéité. Intégrant les deux membres de cette équation, et faisant sortir du signe $\int$ toutes les variations des différentielles au moyen de l'intégration par parties, on

obtient la valeur suivante de $\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}$:

$$
(12) \quad \left\{
\begin{aligned}
\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U} = & \left\{
\begin{array}{l|l|l|l}
\mathrm{M} & \delta x + \mathrm{N} & d\delta x + \mathrm{P} & d^2\delta x + \ldots \\
- d\mathrm{N} & \quad - d\mathrm{P} & \ldots\ldots\ldots & \\
+ d^2\mathrm{P} & \ldots\ldots\ldots & & \\
\ldots\ldots & & & \\
+ \mathrm{M}' & \delta y + \mathrm{N}' & d\delta y + \mathrm{P} & d^2\delta y + \ldots \\
- d\mathrm{N}' & \quad - d\mathrm{P}' & \ldots\ldots\ldots & \\
+ d^2\mathrm{P}' & \ldots\ldots\ldots & & \\
\ldots\ldots & & &
\end{array}
\right\}_{x_1}^{x_2} \\
& + \int_{x_1}^{x_2} \delta x \, (\mathrm{L} - d\mathrm{M} + d^2\mathrm{N} - d^3\mathrm{P} + \ldots) \\
& + \int_{x_1}^{x_2} \delta y \, (\mathrm{L}' - d\mathrm{M}' + d^2\mathrm{N}' - d^3\mathrm{P}' + \ldots).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on avait dans U d'autres fonctions que x et y, on ajouterait des expressions semblables à chacune de celles qui se rapportent à x ou y dans cette formule. On agirait comme dans les cas précédents si U renfermait explicitement les valeurs des variables aux limites.

Détermination des fonctions inconnues.

186. La condition pour qu'une intégrale définie soit maximum consiste en ce que, quelque signe et quelque grandeur qu'on suppose aux variations infiniment petites δx, δy, δz,..., la variation de cette intégrale soit constamment négative : la condition du minimum sera, au contraire, que cette variation soit toujours positive ; et, dans les deux cas, elle doit être de signe constant. Il faut donc que la partie de cette variation où n'entrent que les premières puissances des quantités δx, δy,..., soit nulle, et cette condition sera commune au maximum et au minimum. On reconnaîtra l'un de l'autre au signe de l'en-

semble des termes du second degré, signe qui devra d'ailleurs être constant.

Nous considérerons le cas général où x_1, x_2 sont variables, et nous supposerons les dérivées prises par rapport à x, ce qui est toujours possible. Alors l'expression de la variation de l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} V dx$, en se bornant aux termes du premier ordre et en supposant que V ne renferme qu'une seule fonction y, est donnée par la formule (10). Il faut donc égaler à zéro le second membre de cette équation, pour avoir la condition nécessaire, tant pour le maximum que pour le minimum de l'intégrale.

Mais la somme des termes en dehors du signe $\int$ doit être nulle, et l'intégrale doit l'être aussi séparément; car, sans cela, si l'on fixait arbitrairement les variations indépendantes relatives aux limites, il resterait encore sous le signe $\int$ la fonction arbitraire ω, et cette intégrale définie ne saurait conserver la même valeur, quelle que fût cette fonction; le second membre de l'équation (10) ne serait donc pas constamment nul.

D'ailleurs cette intégrale $\int_{x_1}^{x_2} \omega dx \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} + \ldots\right)$ ne peut pas être nulle, quelle que soit la fonction ω, à moins que la quantité qui la multiplie sous le signe $\int$ ne soit nulle. En effet, ω étant indéterminé pour toutes les valeurs de x entre x_1 et x_2, peut être toujours pris de même signe que le second facteur; tous les éléments de l'intégrale seraient donc positifs, et leur somme ne pourrait être nulle. Il serait d'ailleurs indifférent que ω fût assujetti à certaines conditions pour les valeurs x_1 ou x_2, parce que deux éléments n'ont aucune influence sur une intégrale. On doit donc avoir l'équation suivante :

$$(13) \qquad M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^nU}{dx^n} = 0.$$

Cette équation différentielle est généralement de l'ordre $2n$, puisque V renferme $y^{(n)}$, et que, par conséquent, U peut le renfermer. Elle est nécessaire, mais non suffisante, pour que l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ soit maximum ou minimum. Elle renferme les quantités $x, y, y', y'', \ldots$, et fera connaître y en fonction de x et de $2n$ constantes arbitraires.

Considérons maintenant les termes en dehors du signe $\int$ dans l'équation (10). Si les variations relatives aux deux limites sont indépendantes entre elles, la somme de ces termes devra être nulle pour chaque limite.

Si la question établit des relations entre les variations relatives à une même limite, on s'en sert pour éliminer un nombre égal de ces indéterminées, puis on égale à zéro les coefficients de celles qui restent indépendantes; ces équations, jointes aux équations intégrales, serviront à déterminer les constantes, ainsi que les valeurs de x, y, z, relatives aux limites.

187. S'il y avait plusieurs fonctions y, $z, \ldots$, on suivrait la même marche. L'intégrale qui entre dans la variation devrait encore être nulle, indépendamment des termes intégrés. Elle renfermerait, comme nous l'avons vu, plusieurs fonctions ω, $\omega', \ldots$, dont les valeurs sont

$$\omega = \delta y - y'\delta x, \quad \omega' = \delta z - z'\delta x, \ldots,$$

Ces fonctions arbitraires seraient indépendantes, puisque dans chacune d'elles il s'introduit une nouvelle variation arbitraire. Il faudrait donc que les quantités qui multiplient chacune d'elles fussent nulles séparément, ce qui donnerait autant d'équations différentielles simultanées qu'il y a de fonctions à déterminer.

Elles seraient de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} M - \dfrac{dN}{dx} + \dfrac{d^2P}{dx^2} - \dfrac{d^3Q}{dx^3} + \ldots = 0, \\ M' - \dfrac{dN'}{dx} + \dfrac{d^2P'}{dx^2} - \dfrac{d^3Q'}{dx^3} + \ldots = 0, \end{cases}$$

M', N',... représentant, par rapport à z, ce que M, N,... représentent par rapport à y.

Les constantes se détermineraient encore par les conditions relatives aux limites.

188. Si les fonctions y, z étaient assujetties à satisfaire à une équation $F(x, y, z) = 0$, les variations δx, δy, δz satisferaient à la suivante :

$$(a)\qquad \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0.$$

On pourrait en tirer δz en fonction de δx, δy, et le substituer dans l'expression de la variation de l'intégrale ; on aurait ainsi une fonction indéterminée de moins sous le signe $\int$, et, par suite, une équation de moins, qui serait remplacée par $F(x, y, z) = 0$.

En effet, la quantité sous le signe $\int$, qui doit être égalée à zéro, est de la forme

$$A\omega + A'\omega',$$

et l'équation (a) devient, en remplaçant δy et δz par leurs valeurs,

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}(y'\delta x + \omega) + \frac{dF}{dz}(z'\delta x + \omega') = 0.$$

Le coefficient de δx dans cette équation est nul, puisqu'en différentiant l'équation $F(x, y, z) = 0$, on trouve

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz}z' = 0 ;$$

il reste donc seulement

$$\omega\frac{dF}{dy}+\omega'\frac{dF}{dz}=0.$$

Tirant de là ω', et le substituant dans l'expression $A\omega+A'\omega'$, qui doit être égalée à zéro, on obtient

$$\omega\left(A-A'\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\right),$$

et cette quantité devant être nulle, quelle que soit la fonction ω, on doit nécessairement poser

$$A-A'\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}=0.$$

On aura ainsi entre y et z les deux équations

$$A\frac{dF}{dz}=A'\frac{dF}{dy}, \tag{15}$$

et

$$F(x, y, z)=0,$$

d'où l'on pourra tirer y et z en fonction de x.

189. *Autre espèce de condition.* — Souvent, au lieu d'assujettir les valeurs de x, y, z à satisfaire à une équation de forme déterminée, on demande qu'une certaine intégrale définie conserve une valeur constante : on a alors ce que l'on appelle un maximum ou un minimum *relatif*.

Soit donc $\int_{x_1}^{x_2}Udx=a$, et proposons-nous de trouver le maximum ou le minimum de $\int_{x_1}^{x_2}Vdx$. Les variations

de ces deux intégrales devront être nulles; et, en supposant d'abord les limites fixes, on arrivera aux deux équations

$$(\alpha) \qquad \int_{x_1}^{x_2} u\omega dx = 0, \qquad (6) \quad \int_{x_1}^{x_2} v\omega dx = 0;$$

et la seconde devra être satisfaite quand on y mettra pour ω une fonction quelconque satisfaisant à la première; u et v sont déterminés par U et V au moyen d'une formule démontrée précédemment; et ω désigne encore $\delta y - y'\delta x$. On voit de suite que cette condition serait remplie si u et v ne différaient que par un facteur constant, et nous allons démontrer que cela ne peut être autrement.

Posons, avec M. Cauchy,

$$\int_{x_1}^{x} u\omega dx = \varphi(x),$$

cette fonction $\varphi(x)$ ne sera assujettie, en vertu de l'équation (α), qu'à la condition $\varphi(x_2)=0$; on a d'ailleurs évidemment $\varphi(x_1)=0$, mais $\varphi(x)$ est entièrement arbitraire entre x_1 et et x_2. On tire immédiatement

$$u\omega = \varphi'(x), \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{u}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (6), on obtient

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{v}{u}\varphi'(x)\, dx = 0.$$

Pour y introduire, au lieu de $\varphi'(x)$, la fonction $\varphi(x)$ dont les conditions sont bien connues, intégrons par parties; nous trouverons, en désignant par $\left(\frac{v}{u}\right)'$ la dérivée de $\frac{v}{u}$,

$$\int \frac{v}{u}\varphi'(x)\, dx = \frac{v}{u}\varphi(x) - \int \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx;$$

prenant x_1 et x_2 pour limites des intégrales, et observant que $\varphi(x)$ devient nulle à ces limites, il vient

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{v}{u}\right) \varphi'(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx,$$

et, par conséquent,

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu quel que soit $\varphi(x)$, on en conclut nécessairement $\left(\frac{v}{u}\right) = 0$, et, par suite,

$$\frac{v}{u} = \alpha, \quad \text{ou} \quad v = \alpha u,$$

α désignant une constante inconnue.

Telle est donc l'équation différentielle qui déterminera la fonction y. Quand sa valeur sera trouvée, et que les constantes introduites par l'intégration auront été déterminées par les conditions des extrémités, on la substituera dans l'équation $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx = a$, qui fera connaître la valeur de la constante α.

Il est facile de voir que l'on arriverait au même résultat, en cherchant le maximum absolu de $\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{V} - \alpha \mathrm{U})dx$, et déterminant la constante α comme nous l'avons indiqué. On retombe ainsi sur la règle donnée autrefois par Euler.

Supposons actuellement que les limites x_1, x_2 ne soient pas fixes, les équations (α), (6) seront remplacées par les deux suivantes :

$$(\gamma)\ \psi_2 - \psi_1 + \int_{x_1}^{x_2} u\omega dx = 0, \quad (\delta)\ \ \chi_2 - \chi_1 + \int_{x_1}^{x_2} v\omega dx = 0,$$

ψ et χ désignant les termes en dehors du signe somme, qui deviennent ψ_1 et χ_1 à la première limite, et ψ_2, χ_2 à la seconde.

L'équation (δ) devra être satisfaite quand on mettra pour ω une fonction quelconque telle que l'équation (γ) ait lieu, de quelque manière que ce soit; ainsi ω n'est assujetti qu'à la condition que $\int_{x_1}^{x_2} u\omega dx$ soit égal à $\psi_1 - \psi_2$; et il faut que l'équation (δ) ait lieu pour toutes les valeurs de ω qui y satisferont: c'est là ce qui doit déterminer la fonction inconnue y.

Posons encore $\int_{x_1}^{x} u\omega dx = \varphi(x)$, on aura $\varphi(x_1) = 0$, et, en vertu de l'équation (δ),

$$\varphi(x_2) = \psi_1 - \psi_2,$$

et $\varphi(x)$ ne sera assujetti à aucune autre condition.

Reportant dans l'équation (4) pour ω sa valeur $\frac{\varphi'(x)}{u}$, il vient

$$\chi_2 - \chi_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{v}{u} \varphi'(x) dx = 0.$$

Pour introduire au lieu de $\varphi'(x)$ la fonction $\varphi(x)$ dont les conditions sont connues, intégrons par parties; l'équation précédente deviendra, en ayant égard aux valeurs de $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$,

$$(\varepsilon) \qquad \chi_2 - \chi_1 - \left(\frac{v}{u}\right)_2 (\psi_2 - \psi_1) - \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx = 0;$$

et comme $\varphi(x)$ est tout à fait arbitraire entre x_1 et x_2, il faut que cette dernière intégrale soit nulle, ainsi que la partie restante du premier membre. On aura donc encore

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = 0, \quad \text{ou} \quad v = au,$$

α désignant une constante. Remplaçant $\left(\frac{v}{u}\right)_2$ par α dans la première partie de l'équation (4), on aura

$$\chi_2 - \chi_1 - \alpha(\psi_2 - \psi_1) = 0.$$

Les constantes introduites par l'intégration se détermineront par les conditions relatives aux extrémités, et la constante α par l'équation $\int_{x_1}^{x_2} U dx = a$.

On voit encore qu'on arriverait aux mêmes résultats en cherchant le maximum ou le minimum absolu de $\int_{x_1}^{x_2}(V - \alpha U)dx$, α étant une constante indéterminée.

On traiterait d'une manière analogue le cas où l'on aurait plusieurs fonctions inconnues, ou plusieurs intégrales définies ayant des valeurs constantes.

190. Considérons maintenant le cas où l'intégrale est de la forme $\int_{x_1}^{x_2} U$, U ne renfermant que des différentielles prises par rapport à une variable arbitraire. La variation de cette intégrale est donnée alors par la formule (12), et, par les mêmes raisons que dans le premier cas, il faut égaler séparément à zéro la partie qui est dégagée du signe $\int$ et celle qui se compose de toutes les intégrales, qui sont en nombre égal à celui des variables $x, y, z, \ldots$.

Or les fonctions $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ sont complétement indépendantes les unes des autres; donc chaque intégrale doit être nulle séparément, ce qui conduit aux équations suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} L - dM + d^2N - d^3P + \ldots = 0, \\ L' - dM' + d^2N' - d^3P' + \ldots = 0, \\ L'' - dM'' + d^2N'' - d^3P'' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On aura ainsi autant d'équations que de variables x, y, z,...; et comme l'une d'entre elles doit rester indéterminée, il est évident qu'une de ces équations doit rentrer dans les autres. Nous nous bornerons à cette remarque; et nous ajouterons qu'on trouve ici un avantage que ne présentait pas le calcul du premier cas; c'est qu'on pourra choisir le système d'équations le plus avantageux, en laissant de côté l'équation la moins simple. Quand on aura trouvé y, z,... en fonction de x, les constantes arbitraires introduites par l'intégration se détermineront, comme dans le premier cas, au moyen de l'équation qui se rapporte aux limites.

191. L'intégration des équations (16) devient plus simple lorsque U ne contient pas x, ou l'une des autres fonctions; car alors, le premier terme de l'une de ces équations étant nul, et tous les autres, des différentielles exactes, on aura immédiatement une intégrale première de cette équation. Si plusieurs des variables $x, y,$... manquent à la fois dans U, un nombre égal des équations (16) sont intégrables.

192. Les équations (14) présentent la même simplification quand y ou z n'entrent pas dans V; mais, quand c'est x qui manque, il faut faire quelques transformations pour obtenir la simplification que nous ont offerte immédiatement les équations.

En effet, en supposant, pour plus de simplicité, qu'il n'y ait qu'une seule fonction inconnue y, la condition du maximum ou du minimum sera

$$(a) \qquad \mathrm{M} - \frac{d\mathrm{N}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2} - \frac{d^3\mathrm{Q}}{dx^3} + \ldots = 0,$$

et l'on aura, en observant que V ne renferme pas x,

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \mathrm{M}y' + \mathrm{N}y'' + \mathrm{P}y''' + \mathrm{Q}y^{\mathrm{IV}} + \ldots .$$

Retranchant de cette équation la précédente, multipliée par y', il vient

$$\frac{dV}{dx} = \left(Ny'' + y'\frac{dN}{dx}\right) + \left(Py''' - y'\frac{d^2P}{dx^2}\right) + \left(Qy^{\text{IV}} + y'\frac{d^3Q}{dx^3}\right) + \dots$$

Or il est facile de voir que le second membre de cette équation est une dérivée exacte.

Pour cela, remarquons généralement qu'en désignant par u et v des fonctions quelconques de x, une expression de la forme

$$ud^nv - vd^nu$$

est une différentielle exacte quand n est pair, et

$$ud^nv + vd^nu$$

en est une lorsque n est impair. Il en résultera que tous les binômes qui forment le second membre de la dernière équation seront des dérivées exactes, et que, par conséquent, on pourra intégrer les deux membres de cette équation; ce qui conduira à une équation d'un ordre moins élevé.

Supposons, par exemple, que V ne renferme que y, y' et y''. La dernière équation devient

$$\frac{dV}{dx} = \left(Ny'' + y'\frac{dN}{dx}\right) + \left(Py''' - y'\frac{d^2P}{dx^2}\right);$$

d'où, en intégrant,

$$(b) \qquad V = Ny' + Py'' - y'\frac{dP}{dx} + C,$$

équation du troisième ordre, tandis que l'équation (a) était du quatrième. Si, en même temps, V était indépendant de y, on aurait $M = 0$; l'équation (a) serait in-

tégrable, et donnerait

$$N - \frac{dP}{dx} = C'.$$

En éliminant $\frac{dP}{dx}$ entre cette équation et la précédente, on trouverait

$$V = Py'' + C'y' + C,$$

C et C′ désignant deux constantes arbitraires. Cette équation n'est plus que du second ordre. Ainsi, lorsque V ne renferme que y', y'', on peut obtenir une intégrale seconde de l'équation (a), et ramener le calcul à l'intégration d'une équation du deuxième ordre.

Si V renfermait une seconde fonction z et ses dérivées z' et z'', on obtiendrait de même

$$(17)\quad V = Ny' + Py'' - y'\frac{dP}{dx} + N'z' + P'z'' - z'\frac{dP'}{dx} + C.$$

Cas particulier où l'on ne considère que les différentielles du premier ordre.

193. Appliquons cette théorie au cas simple où la fonction V renfermerait trois variables x, y, z, et les premières dérivées seulement de y et z.

L'intégrale proposée sera

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y'\, z')\, dx,$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx = 0.$$

1°. S'il n'existe aucune équation générale entre x, y, z, on fera usage des équations (14), et l'on aura

$$(18)\qquad M - \frac{dN}{dx} = 0, \quad M' - \frac{dN'}{dx} = 0,$$

en supposant toujours

$$\frac{df}{dy} = \text{M}, \quad \frac{df}{dy'} = \text{N}, \quad \frac{df}{dz} = \text{M}', \quad \frac{df}{dz'} = \text{N}'.$$

Ces deux équations simultanées, étant du second ordre, donneront y et z en fonction de x et de quatre constantes arbitraires.

Si les deux limites sont indépendantes, on aura pour chacune

(19) $$(\text{V} - \text{N}y' - \text{N}'z')\,\delta x + \text{N}\delta y + \text{N}'\delta z = 0.$$

Si pour l'une d'elles il n'existe aucune condition, δx, δy, δz étant indépendants, leurs coefficients doivent être nuls séparément, ce qui donne trois équations entre les valeurs de x, y, z, y', z' relatives à cette limite. Si, au contraire, à cette même limite, x, y, z devaient satisfaire à une équation donnée $\varphi(x, y, z) = 0$, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\,\delta z = 0.$$

Éliminant δz entre cette équation et (19), il ne resterait plus que les indéterminées δx, δy dont on égalerait séparément les coefficients à zéro. On aurait donc encore trois équations entre les valeurs de x, y, z, y', z' relatives à cette limite. On agirait de la même manière si l'on avait une seconde équation.

Actuellement il est facile de déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration; car les équations obtenues entre x, y, z, et ces quatre constantes devant être satisfaites par x_1, y_1, z_1, et par x_2, y_2, z_2, il en résultera deux équations pour chaque limite. Ainsi, pour chacune d'elles, on aura cinq équations entre les valeurs de x, y, z qui s'y rapportent et les quatre constantes; on pourra donc déterminer ces constantes et les valeurs de x, y, z, relatives aux limites.

2°. Si les variables x, y, z sont tenues de satisfaire à une équation $F(x, y, z) = 0$, il faudra faire usage de la formule (15), qui devient, dans ce cas,

$$(20) \qquad \left(M - \frac{dN}{dx}\right)\frac{dF}{dz} = \left(M' - \frac{dN'}{dx}\right)\frac{dF}{dy}.$$

Éliminant z au moyen de l'équation $F(x, y, z) = 0$, on aura une équation du second ordre entre x et y. En l'intégrant, on connaîtra y, et, par suite, z, en fonction de x et de deux constantes arbitraires.

Les valeurs de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, se détermineront comme dans le cas précédent, en observant qu'elles doivent satisfaire à l'équation $F(x, y, z) = 0$. On aura alors quatre équations pour chaque limite. Les deux constantes arbitraires se déduiront de ces équations, ainsi que les valeurs de x, y, z relatives aux limites.

Application à quelques problèmes particuliers.

194. *Ligne de longueur minimum.* — Considérons d'abord le cas où l'on ne donne pas de condition générale entre les coordonnées x, y, z des divers points de cette ligne, c'est-à-dire où elle n'est pas assujettie à se trouver sur une surface donnée.

L'intégrale qui doit être minimum est

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

on a donc

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{ds}{dx}, \quad M = 0, \quad M' = 0,$$

$$N = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds}, \quad N' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds}$$

Les équations (18) deviennent

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dN'}{dx} = 0;$$

N et N' sont donc constants, et, par suite, y' et z'.

Soient

$$y' = C, \qquad z' = C',$$

on en déduit

$$y = Cx + d, \quad z = C'x + d'.$$

Ainsi, quelles que soient les conditions relatives aux extrémités, on trouve, comme on devait s'y attendre, les équations d'une ligne droite.

L'équation (19), qui doit avoir lieu pour chaque extrémité, devient

$$(a) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta x + y'\delta y + z'\delta z = 0, \\ \text{ou} \\ dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0. \end{array} \right.$$

Or il y a trois cas à examiner pour chaque extrémité :

1°. Si l'extrémité (x_1, y_1, z_1) est fixe, on a

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta z_1 = 0;$$

ses coordonnées x_1, y_1, z_1 sont données, et les constantes C, C', d, d' devront satisfaire aux deux conditions

$$y_1 = Cx_1 + d, \quad z_1 = C'x_1 + d'.$$

2°. Si cette extrémité satisfait à une équation $F(x, y, z) = 0$, on aura

$$\frac{dF}{dx}\delta x_1 + \frac{dF}{dy}\delta y_1 + \frac{dF}{dz}\delta z_1 = 0.$$

Éliminant δz_1 entre l'équation (19) et celle-ci, puis égalant à zéro les coefficients de δx_1 et δy_1, on obtient

$$\frac{dF}{dz} = z'\frac{dF}{dx}, \quad y'\frac{dF}{dz} = z'\frac{dF}{dy}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dF}{dy} = y'\frac{dF}{dx},$$

ou

$$\frac{dF}{dz} = C' \frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} = C \frac{dF}{dx},$$

équations dans lesquelles x, y, z sont remplacés par x_1, y_1, z_1.

Ces deux équations seront jointes à $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, et aux deux suivantes :

$$y_1 = Cx_1 + d, \quad z_1 = C'x_1 + d'.$$

On aura ainsi cinq équations entre x_1, y_1, z_1 et les quatre constantes.

3°. Si l'on donnait deux équations entre x_1, y_1, z_1, on arriverait de même à cinq équations entre elles et les constantes.

Ainsi, pour chaque extrémité, soit libre, soit assujettie à une ou deux conditions, on trouve toujours deux équations entre les constantes, ou directement, ou par l'élimination de x_1, y_1, z_1. Donc les quatre constantes pourront toujours être déterminées par les conditions relatives aux deux limites.

195. L'équation (a) renferme une propriété géométrique remarquable de la ligne minimum. En effet, elle exprime que la direction qui fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz, est perpendiculaire à celle dont les cosinus sont proportionnels à δx, δy, δz. D'où il résulte que la tangente à la ligne cherchée, menée par l'une quelconque de ses extrémités, est perpendiculaire à toutes les directions suivant lesquelles cette extrémité peut se mouvoir. Elle est donc normale à la courbe ou à la surface sur laquelle doit rester cette extrémité, si elle n'est pas fixe de position.

196. Supposons maintenant que la ligne cherchée soit assujettie à se trouver sur une surface donnée, ayant pour équation

$$F(x, y, z) = 0;$$

il faudra, dans ce cas, satisfaire à l'équation (20), qui se réduit à

$$\frac{dF}{dz}\frac{dN}{dx}=\frac{dF}{dy}\frac{dN'}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dz}d.\frac{dy}{ds}=\frac{dF}{dy}d.\frac{dz}{ds}.$$

Cette équation du second ordre, jointe à la précédente, donnera y et z en fonction de x et de deux constantes arbitraires.

L'équation (19) aura lieu pour chaque limite, et démontre encore que, si elles ne sont pas fixes, la courbe cherchée est perpendiculaire aux courbes suivant lesquelles elles peuvent se mouvoir sur la surface donnée. Dans l'un et l'autre cas, les constantes se déterminent par les moyens déjà indiqués.

197. L'équation $\frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}$ fait connaître une propriété remarquable de la ligne minimum. En effet, la droite qui joint un quelconque de ses points au centre de courbure fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$; et les cosinus relatifs à la normale à la surface sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$. Or l'équation précédente donne

$$(b) \qquad \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dF}{dy}}=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dF}{dz}},$$

et il est facile de voir que ces rapports sont aussi égaux à $\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dF}{dx}}$; car la symétrie des données relativement à x, y, z

montre qu'en dirigeant autrement le calcul, on aurait trouvé ce dernier rapport égal à l'un des deux autres.

C'est, au reste, ce qu'on peut facilement vérifier.

En effet, les équations (b) donnent

$$\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dF}{dz}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}} = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dF}{dx}},$$

comme nous l'avions annoncé; la direction de la normale à la surface se confond donc avec celle de la droite menée du même point au centre de courbure de la ligne minimum. En d'autres termes, le plan osculateur de cette courbe est constamment normal à la surface.

198. *Aire de révolution minimum.* — Proposons-nous de trouver la courbe plane passant par deux points donnés, et qui engendre une aire minimum, en tournant autour d'un axe AX situé dans son plan.

L'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{dx^2 + dy^2}$ devra être minimum; et x n'entrant pas sous le signe $\int$, il est convenable d'appliquer les équations (16) ou (17). En prenant les premières, et observant que L, N, P,... sont nuls, on trouvera, en désignant par c une constante arbitraire,

$$M = c, \quad \text{ou} \quad \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = c;$$

d'où l'on tire

$$y^2 = c^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right), \quad dx = \frac{cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

et, en intégrant,

$$\frac{x - c_1}{c} = \text{l.}\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}\right), \quad y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{\frac{x - c_1}{c}},$$

d'où

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right),$$

équation d'une chaînette dont les branches infinies s'élèvent au-dessus de l'axe des x, la direction de la pesanteur étant supposée perpendiculaire à cet axe.

Les constantes c, c_1 se détermineront en exprimant que l'équation est satisfaite par les coordonnées des points donnés. Si l'on considère le cas le plus simple, où les ordonnées de ces points sont égales, la courbe sera symétrique par rapport à la perpendiculaire à l'axe, menée à égale distance de ces deux points. Soient a et $-a$ leurs abscisses respectives, et b leur ordonnée, on aura d'abord $c_1 = 0$ pour que l'équation ne change pas quand on remplace x par $-x$; puis

$$b = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right),$$

ce qui détermine c.

Si l'on pose $\frac{a}{c} = u$, on a $\frac{bu}{a} = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$, et l'on connaîtra u par l'intersection de la droite $y = \frac{bu}{a}$ et de la chaînette $y = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$; la valeur de c s'ensuivra.

199. Il n'est pas toujours possible de satisfaire à l'équation

$$\frac{2b}{a} = \frac{e^u + e^{-u}}{u}.$$

En effet, le second membre est infini pour $u = 0$ et $u = \infty$; dans l'intervalle, il reste fini et positif : il a donc un minimum, et le problème serait impossible si $\frac{2b}{a}$ était moindre. Cherchons donc la valeur de $\frac{2b}{a}$ relative à ce

minimum : il y aura une seule solution si l'on donne $\frac{2b}{a}$ égal à cette valeur; deux, s'il est plus grand; et aucune, s'il est plus petit.

La valeur de u relative à ce minimum satisfait à

$$\frac{e^u + e^{-u}}{u} = e^u - e^{-u}.$$

Si l'on éliminait u entre cette équation et la précédente, on aurait l'équation qui doit déterminer la plus petite valeur que $\frac{b}{a}$ puisse avoir pour que le problème soit possible.

Si l'on observe qu'on a identiquement

$$(e^u - e^{-u})^2 = (e^u + e^{-u})^2 - 4,$$

la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{e^u + e^{-u}}{u} = \sqrt{(e^u + e^{-u})^2 - 4},$$

d'où résulte

$$\frac{2b}{a} = \sqrt{\frac{4b^2u^2}{a^2} - 4},$$

et, par suite,

$$u^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}.$$

Or

$$\frac{2b}{a} = e^u - e^{-u} = 2\left(u + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2...5} + \dots\right),$$

d'où

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}\left[1 + \frac{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}{1.2.3} + \frac{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}{1.2...5} + \dots\right].$$

Si l'on néglige $\frac{a}{b}$ dans le second membre, il devient trop

petit ; ainsi

$$\frac{b}{a} > 1 + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots5} + \ldots$$

La réciproque de cette valeur est donc plus grande que $\frac{a}{b}$; et si on la substitue dans le second membre, il devient trop grand et donne une limite supérieure de $\frac{b}{a}$. Il en résulte une valeur trop grande pour $\frac{a}{b}$; et, en continuant ainsi, l'on aura une série de valeurs alternativement plus grandes et plus petites que $\frac{b}{a}$, et qui s'en rapprocheront indéfiniment. On trouvera ainsi

$$\frac{b}{a} = 1,19967.$$

Il faut donc que le rapport $\frac{b}{a}$ soit au moins égal à 1,19967 pour qu'il y ait une courbe qui engendre une aire minimum ; et l'on concevra la possibilité qu'il n'en existe pas, si l'on observe que, lorsque la courbe coupera l'axe, les ordonnées deviendront négatives, et l'intégrale décroîtra indéfiniment.

Si l'on a $\frac{b}{a} > 1,19967$, on a deux solutions ; mais elles ne peuvent donner deux minima, car il devrait y avoir un maximum intermédiaire, ce qui exigerait trois solutions. Elles ne peuvent non plus donner deux maxima ; elles donnent donc un maximum et un minimum. L'intégrale diminuant jusqu'à l'infini négatif, on voit que le maximum correspondra à la chaînette qui aura son sommet le plus bas, et le minimum à celle dont le sommet sera le plus élevé. Cette dernière correspond à la plus grande des deux valeurs de c, puisque l'équation de la

courbe est

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

et qu'en faisant $x = 0$, on trouve c pour ordonnée du sommet.

200. *Maximum de l'aire de courbes isopérimètres.* — Supposons que les extrémités de la courbe soient données, et aient pour coordonnées x_1, y_1 et x_2, y_2; l'intégrale qu'il faut rendre maximum est $\int_{x_1}^{x_2} y dx$, et l'on doit avoir, en désignant par l la longueur donnée de la courbe,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + y'^2} = l.$$

On posera, d'après la règle du maximum relatif,

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[\left(y + \alpha\sqrt{1 + y'^2}\right) dx\right] = 0;$$

x n'entrant pas sous le signe $\int$, on appliquera l'équation (17), et l'on trouvera

$$y + \alpha\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\alpha y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} + c,$$

ou

$$(y - c)\sqrt{1 + y'^2} + \alpha = 0;$$

d'où

$$dx = \frac{(y - c)dy}{\sqrt{\alpha^2 - (y - c)^2}};$$

et enfin

$$(y - c)^2 + (x - c')^2 = \alpha^2,$$

c et c' désignant deux constantes arbitraires. La courbe est

donc un arc de cercle; et il reste à trouver les constantes α, c, c'. On exprimera d'abord qu'il passe par les deux points extrêmes donnés M, N (*fig.* 5), ce qui donnera

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - c')^2 = \alpha^2,$$
$$(x_2 - c)^2 + (y_2 - c')^2 = \alpha^2;$$

d'où

$$x_1^2 - x_2^2 - 2c(x_1 - x_2) + y_1^2 - y_2^2 - 2c'(y_1 - y_2) = 0,$$

équation qui exprime que le centre se trouve sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint les extrémités.

Soit d la longueur donnée de cette droite, on aura

$$d = 2\alpha \sin\frac{l}{2\alpha},$$

équation qui détermine α; c et c' s'ensuivront, et l'on trouvera deux cercles dont les centres O, O' seront symétriques par rapport à la corde donnée. L'un se rapportera au maximum, l'autre au minimum : car les deux aires sont respectivement égales au trapèze MPQN, augmenté ou diminué de la même quantité MRN; donc, si l'une est maximum, l'autre est minimum. On en conclut encore que cette surface MRN est maximum; et si la question a pour objet l'aire comprise entre la corde donnée et l'arc, elle n'est susceptible que d'un maximum, et il est déterminé par l'arc de cercle dont la corde et la longueur sont connues.

Si la grandeur de l'arc et la direction des axes étaient telles que le segment MRN fût coupé par les ordonnées extrêmes, cette dernière proposition n'en serait pas moins vraie: car, si l'on suppose la courbe déterminée, on peut y tracer d'une infinité de manières une corde telle que, pour un système d'axes convenable, on rentre dans le cas précédent. Or, l'aire totale étant maximum, ce segment

le sera de même en laissant son périmètre constant; donc il est terminé par un arc de cercle : ce qui ne saurait être pour toutes les cordes qu'on peut ainsi concevoir, si la courbe entière n'est pas un arc de cercle. Si les deux points M et N se confondent, on a le cas d'une courbe fermée, et l'on voit qu'elle doit former un cercle entier.

201. *Maximum de la surface engendrée par la révolution de courbes isopérimètres.* — Il faut, dans ce cas, que $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\sqrt{1+y'^2}$ soit maximum, en même temps que $\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2} = l$; on devra donc poser

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[\left(y\sqrt{1+y'^2} + \alpha\sqrt{1+y'^2}\right)dx\right] = 0,$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[(y+\alpha)\sqrt{1+y'^2}\,dx\right] = 0.$$

Le calcul sera le même que dans le cas déjà traité, où l'on ne donne pas la longueur de la courbe. Seulement $y+\alpha$ est substitué à y. On trouvera donc

$$y+\alpha = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right).$$

La courbe est encore une chaînette. Les trois constantes, α, c, c_1, se détermineront en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés, et que sa longueur est l.

202. On démontre en statique que la chaînette est, de toutes les courbes isopérimètres, celle dont le centre de gravité est le plus bas possible. En admettant cette propriété, on aurait pu conclure que la courbe qui engendre l'aire minimum est une chaînette dont la convexité est

tournée vers l'axe, et que celle qui engendre l'aire maximum est celle qu'on obtiendrait en supposant l'action de la pesanteur dirigée en sens contraire.

203. *Solide minimum engendré par la révolution de courbes isopérimètres.* — Soit l la longueur d'une courbe qui passe par deux points donnés, et tourne autour d'un axe situé dans son plan; le solide engendré aura pour expression $\int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx$. Ainsi $\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$ devra être minimum, avec la condition

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = l.$$

On devra donc poser

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[\left(y^2 + \alpha\sqrt{1 + y'^2}\right) dx\right] = 0,$$

et la condition du minimum sera, en appliquant la formule (17),

$$y^2 + \alpha\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\alpha y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} + c,$$

ou

$$(y^2 - c)\sqrt{1 + y'^2} + \alpha = 0;$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{\alpha^2 - (y^2 - c)^2}}.$$

Cette équation est celle de la courbe nommée *élastique*, qui représente la figure d'un ressort en équilibre sous l'action de certaines forces. On ne peut l'intégrer que par série. Les deux constantes α et c, ainsi que celle qu'introduirait l'intégration, se détermineraient en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés, et que sa longueur est l.

204. *Brachistochrone.* — On nomme ainsi la courbe que doit suivre un corps pesant, pour descendre d'un point à un autre dans le moindre temps possible. En désignant par g la pesanteur, on a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(x_1 - x),$$

en désignant par x les ordonnées comptées verticalement, en sens inverse de la pesanteur, et par x_1 celle du point le plus élevé. On tire de là

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{x_1 - x}};$$

et, pour satisfaire à la condition donnée, il faudra que l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{x_1 - x}}$ soit minimum, ou que l'intégrale négative $\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{x_1 - x}}$ soit maximum; ce qui donne d'abord les équations

$$\frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \frac{dy}{ds} = c, \qquad \frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \frac{dz}{ds} = c',$$

d'où

$$\frac{dy}{dz} = \frac{c}{c'}, \qquad y = \frac{c}{c'} z + c''.$$

Cette équation montre que la courbe est comprise dans un plan vertical. Prenons ce plan pour plan des x et y; il est connu, puisqu'il renferme les deux points donnés. On a alors $z = 0$, et il ne reste que l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \frac{dy}{ds} = c, \qquad \text{d'où} \qquad dy = -\frac{dx\sqrt{x_1 - x}}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - (x_1 - x)}}.$$

Si l'on change $x_1 - x$ en x, cette équation devient

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{\frac{1}{c^2} - x}},$$

ce qui s'intégrera facilement.

Cette courbe est une cycloïde dont nous allons reconnaître la position.

B et C (*fig.* 6) étant les deux points donnés, la transformation que nous avons faite revient à prendre l'origine en B, et l'axe des x dans la direction de la pesanteur. Dans ce système d'axes, une cycloïde dont la base serait BY et l'origine en B, aurait pour équation différentielle

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

a étant le rayon du cercle générateur.

La courbe cherchée est donc une cycloïde dont la base est BY, le diamètre du cercle générateur $\frac{1}{c^2}$, et dont l'une des extrémités de la base est B.

La constante c se déterminera en exprimant que l'équation finie de la cycloïde est satisfaite par les coordonnées du point C.

205. Supposons maintenant que les deux points extrêmes, au lieu d'être fixes, soient assujettis à se trouver sur des courbes données. On parviendrait, comme dans le premier cas, à l'équation $y = \frac{c}{c'} z + c''$, qui prouve que la courbe est encore située dans un plan vertical. Ce plan est inconnu, mais l'équation de la courbe, rapportée à des axes pris dans ce plan, n'en aurait pas moins la forme déjà trouvée ; d'où l'on conclut que cette courbe est une cycloïde dont la base est horizontale et dont l'origine est

au point de départ. Tout se réduit à trouver les coordonnées des deux points extrêmes et le rayon du cercle générateur. Les deux limites étant indépendantes l'une de l'autre, on devra avoir, pour la première, l'équation

$$(a)\left[\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dx_1}\,dx-(V-Ny'-N'z')\right]\delta x_1-N\delta y_1-N'\delta z_1=0.$$

Dans le cas actuel, on a

$$V=\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{x_1-x}},$$

$$N=\frac{y'}{\sqrt{x_1-x}\,\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c,$$

$$N'=\frac{z'}{\sqrt{x_1-x}\,\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c',$$

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{(x_1-x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\frac{ds}{dx}}{2\,(x_1-x_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation (a) deviendra donc

$$\left.\begin{array}{l}\left[\int_{x_1}^{x_2}-\frac{(x_1-x)^{-\frac{3}{2}}ds}{2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}-V+cy'+c'z'\right]\delta x_1\\ \qquad\qquad\qquad\qquad -c\delta y_1-c'\delta z_1\end{array}\right\}=0.$$

L'intégration par parties donne

$$\int-\frac{(x_1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2}\,dx\sqrt{1+y'^2+z'^2}=-(x_1-x)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

$$+\int\frac{(x_1-x)^{-\frac{1}{2}}(y'y''+z'z'')\,dx}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=-V+\int(cy''+c'z'')\,dx$$

$$=-V+cy'+c'z'.$$

Il faut, dans cette dernière quantité, substituer à x suc-

cessivement x_2 et x_1, et retrancher le second résultat du premier. Pour éviter la difficulté relative au facteur $(x_1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, qui devient infini, nous prendrons d'abord une limite différente de x_1, et nous opérerons les réductions; puis nous passerons à la limite x_1. Les trois termes $V - cy' - c'z'$, relatifs à cette limite qui tend vers x_1, seront détruits identiquement, et il restera enfin l'équation

$$(b) \qquad (-V + cy' + c'z')_2\,\delta x_1 - c\delta y_1 - c'\delta z_1 = 0.$$

En substituant les valeurs de V, c, c', on trouve

$$-V + cy' + c'z' = \frac{-1}{\sqrt{x_1 - x}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

et l'équation (b) devient

$$dx_2\,\delta x_1 + dy_2\,\delta y_1 + dz_2\,\delta z_1 = 0.$$

Elle exprime que *le dernier élément de la courbe cherchée est perpendiculaire à la direction de la tangente à la première courbe donnée, au point de départ.*

L'équation relative à la seconde limite est

$$(V - Ny' - N'z')_2\,\delta x_2 + N\delta y_2 + N'\delta z_2 = 0,$$

ou

$$dx_2\,\delta x_2 + dy_2\,\delta y_2 + dz_2\,\delta z_2 = 0,$$

ce qui montre que *le dernier élément de la cycloïde est perpendiculaire à la tangente à la seconde courbe donnée, au point d'arrivée.*

Ces diverses conditions déterminent la cycloïde dont le premier élément est toujours vertical, et la base horizontale.

Si les deux courbes étaient dans un même plan vertical, les propriétés que nous venons de démontrer prouveraient que les tangentes aux courbes données, aux points de départ et d'arrivée, sont parallèles entre elles.

Calcul des différences finies.

206. On appelle différence d'une variable, l'accroissement fini qu'elle reçoit. Les différences des fonctions sont déterminées par celles des variables dont elles dépendent : on les désigne toutes indistinctement par la caractéristique Δ.

La différence entre les deux valeurs que prend une fonction quand la variable dont elle dépend prend deux valeurs successives, se nomme la différence première de cette fonction. Cette différence est, en général, une fonction de la même variable ; et sa différence première, correspondante à un nouvel accroissement égal de cette variable, se nomme la différence seconde de la fonction. La différence de la différence seconde est la différence troisième de la fonction ; et ainsi de suite. Si l'on désigne par u cette fonction, ses différences successives sont représentées par

$$\Delta u, \quad \Delta^2 u, \quad \Delta^3 u, \ldots, \quad \Delta^m u.$$

207. Supposons généralement que la différence Δx soit une fonction déterminée $f(x)$, et soient

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad x_{m-1}, \quad x_m, \quad \text{etc.},$$

les valeurs successives qui en résultent pour la variable x ; de telle sorte que l'on ait

$$x_1 = x + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x_1, \quad x_3 = x_2 + \Delta x_2, \ldots, \\ x_m = x_{m-1} + \Delta x_{m-1},$$

équations qui pourront encore s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x + \Delta x, \\
x_2 &= x + \Delta x + \Delta x_1, \\
x_3 &= x + \Delta x + \Delta x_1 + \Delta x_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{m-1} &= x + \Delta x + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_{m-2}, \\
x_m &= x + \Delta x + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_{m-1}.
\end{aligned}$$

Toutes ces expressions peuvent être considérées comme dépendant uniquement de la première valeur arbitraire x; car Δx étant une fonction de x, x_1 ou $x + \Delta x$ l'est de même. Δx_1 ou $f(x_1)$ est donc aussi fonction de x seulement, et par suite aussi x_2, qui est égal à $x + \Delta x + \Delta x_1$. De même, Δx_2 ou $f(x_2)$ sera fonction de x seulement, et par suite aussi x_3; et ainsi des autres indéfiniment.

Il est encore utile d'observer que chacune de ces valeurs successives peut se former de la précédente, en y changeant x en $x + \Delta x$. En effet, supposons qu'il en soit ainsi jusqu'à x_{m-1} inclusivement, et changeons x en $x + \Delta x$ dans x_{m-1} : son premier terme x devient $x + \Delta x$; son second terme Δx devient Δx_1; son troisième Δx_1 devient Δx_2, et enfin son dernier devient Δx_{m-1}; par conséquent, x_{m-1} se trouvera changé en x_m. La proposition est donc générale, puisqu'elle est vraie pour x_1. Si maintenant on considère une fonction quelconque $u = \varphi(x)$, et que l'on désigne par

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_{m-1}, \quad u_m, \ldots,$$

les valeurs correspondantes à $x, x_1, \ldots, x_m$, chacune de ces valeurs successives de u pourra être considérée comme fonction de x seulement, et se déduira de la précédente en y changeant x en $x + \Delta x$; car, puisque l'on a généralement

$$u_{m-1} = \varphi(x_{m-1}), \quad u_m = \varphi(x_m),$$

et que x_m ne dépend que de x, et s'obtient en changeant x en $x + \Delta x$ dans x_{m-1}, u_m sera aussi fonction de x seul, et se déduira évidemment de u_{m-1} par ce même changement.

208. D'après la définition que nous avons donnée des différences successives, la seconde différence $\Delta^2 u$ sera l'accroissement que prendra Δu quand on y changera x en $x + \Delta x$; la troisième différence $\Delta^3 u$ sera l'accroisse-

ment de $\Delta^2 u$ résultant du même accroissement Δx, que l'on y fera subir à x; et ainsi de suite.

De même, Δu_1 étant l'accroissement de u_1 relatif à l'accroissement Δx_1 donné à x_1, $\Delta^2 u_1$ sera l'accroissement de Δu_1 quand on y fera croître x_1 de Δx_1; et de même pour les différences suivantes. On voit donc que les différences successives de u_1 seront les mêmes fonctions de x_1 que celles de u le sont de x; et il en sera de même pour les différences de $u_2, u_3, \ldots, u_m$, etc. Il résulte de là que toutes les différences de u_m s'obtiendraient en changeant x_{m-1} en x_m dans les différences correspondantes de u_{m-1}; et, comme on a vu que ce changement s'opère en substituant $x + \Delta x$ à x lorsque l'on considère x_{m-1} comme exprimé en fonction de x, il s'ensuit que les différences d'un même ordre quelconque des quantités

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{m-1}, \quad u_m,$$

se déduisent chacune de la précédente, en y changeant x en $x + \Delta x$. On observera encore que, pour obtenir $\Delta^n u_p$, c'est-à-dire l'accroissement de $\Delta^{n-1} u_p$, dans lequel on change x_p en $x_p + \Delta x_p$, il suffit de prendre l'accroissement que prend $\Delta^{n-1} u_p$ considéré comme fonction de x, dans lequel on changera x en $x + \Delta x$.

Ces propriétés appartiennent aux différences successives de x, comme à celles de la fonction quelconque u.

209. Il est facile d'exprimer la différence $\Delta^m u$ au moyen des $m + 1$ valeurs $u, u_1, u_2, \ldots, u_m$.

En effet, on a d'abord

$$\Delta u = u_1 - u.$$

Pour obtenir $\Delta^2 u$, il faut, dans l'expression de Δu, changer x en $x + \Delta x$, et prendre l'accroissement résultant. Cette substitution changeant respectivement u_1 et u en u_2

et u_1, on trouvera

$$\Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u.$$

De même $\Delta^3 u$ sera l'accroissement de l'expression de $\Delta^2 u$, dans laquelle on changera x en $x + \Delta x$, et l'on aura

$$\Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u.$$

On voit jusqu'ici que les indices de u décroissent d'une unité, depuis l'ordre de la différence jusqu'à zéro; que les coefficients sont alternativement positifs ou négatifs, et sont égaux à ceux de la puissance de même ordre d'un binôme. Or, la manière dont on passe d'une différence à la suivante prouve que cette loi est générale.

En effet, si l'on a

$$\begin{aligned}\Delta^n u = u_n - A_1 u_{n-1} + A_2 u_{n-2} - \ldots \\ + A_p u_{n-p} - A_{p+1} u_{n-p-1} + \ldots,\end{aligned}$$

la différence suivante sera

$$\Delta^{n+1} u = u_{n+1} \begin{array}{l|} - A_1 \\ - 1 \end{array} \, u_n \begin{array}{l|} + A_2 \\ + A_1 \end{array} \, u_{n-1} - \ldots \begin{array}{l|} - A_{p+1} \\ - A_p \end{array} \, u_{n-p} + \ldots$$

La loi des indices de u est donc la même pour cette différence, et les coefficients se forment de ceux de la précédente, en ajoutant, en valeur absolue, chacun d'eux à celui qui le précède : donc, si, pour une différence, ces coefficients sont ceux de la puissance du même ordre d'un binôme, tel que $\alpha - \beta$, ils seront soumis à la même loi pour la différence suivante. Donc cette loi est générale, puisqu'elle a été reconnue pour la seconde différence.

On a donc, quel que soit m,

$$(1) \quad \Delta^m u = u_m - m u_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} u_{m-2} - \ldots \pm u :$$

le dernier terme sera positif si m est pair, et négatif dans le cas contraire.

210. **Réciproquement, on peut exprimer u_m au moyen de u et des m différences Δu, $\Delta^2 u, \ldots, \Delta^m u$. En effet, on a**

$$u_1 = u + \Delta u, \quad u_2 = u + 2\Delta u + \Delta^2 u, \ldots;$$

et, comme on a, en général,

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1},$$

on voit que, si l'on a

$$u_{n-1} = u + A_1 \Delta u + A_2 \Delta^2 u + \ldots + A_p \Delta^p u + A_{p+1} \Delta^{p+1} u + \ldots,$$

on aura

$$u_n = u \begin{array}{c|c|c|c} +\,A_1 & \Delta u + A_2 & \Delta^2 u + \ldots + A_{p+1} & \Delta^{p+1} u + \ldots \\ +\,1 & +\,A_1 & +\,A_p & \end{array}$$

Donc, si les coefficients des termes de u_{n-1} sont ceux du développement de $(\alpha + \beta)^{n-1}$, les coefficients des termes de u_n seront ceux de $(\alpha + \beta)^n$: quant aux indices des différences, ils croîtront de même depuis o jusqu'à n. Or ces lois ont lieu pour u_2 ; donc elles sont générales, et l'on a

$$(2) \qquad u_m = u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 u + \ldots + \Delta^m u.$$

L'analogie entre les seconds membres des équations (1) et (2), et le développement de la puissance m d'un binôme, permet de les remplacer par les équations symboliques très-simples

$$\Delta^m u = (u - 1)^m, \qquad u_m = (1 + \Delta u)^m,$$

dans lesquelles il faut entendre que les exposants des puissances de u et Δu sont remplacés par des indices.

211. *Différentiation des fonctions.* — La différence première d'une fonction $u = F(x)$ est $F(x + \Delta x) - F(x)$. Voyons ce que devient cette différence et celle des ordres

suivants, quand on prend pour $F(x)$ les fonctions simples x_m, a^x, $\log x$, $\sin ax$, $\cos ax$, et que l'on suppose Δx constant.

Soit d'abord $u = Ax^m$; m étant positif, on aura

$$\Delta u = A\left[mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^m\right].$$

La première différence d'un monôme est donc d'un degré moindre d'une unité; et il en est de même d'un polynôme quelconque, puisque la différence d'une somme est la somme des différences.

Il résulte de là que la différence $m^{ième}$ d'un polynôme entier du degré m est indépendante de x. Soit, par exemple,

$$u = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m;$$

pour la trouver, il suffira, dans chaque différence successive, de considérer le terme du degré le plus élevé : car les termes fournis par les autres disparaîtront, au plus tard, à la dernière différentiation; donc ils ne changeront en rien le résultat. Il n'est donc nécessaire de calculer que la différence $m^{ième}$ de Ax^m.

Sa première différence a, pour premier terme,

$$Amx^{m-1}\Delta x,$$

et nous négligerons tous les suivants dont le degré est moindre. La différence de ce premier terme, dans lequel nous supposons Δx constant, a, pour premier terme,

$$Am(m-1)x^{m-2}\Delta x^2,$$

et nous négligerons encore les suivants.

En continuant ainsi, l'on arrive évidemment à

$$\Delta^m u = Am(m-1)(m-2)\ldots 2.1\Delta x^m.$$

La différence $m^{ième}$ étant constante, quel que soit x, les différences d'ordres plus élevés seront nulles.

212. Si l'on considère le produit de n facteurs, croissant par degrés égaux à Δx,

$$u = x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x],$$

on trouvera immédiatement

$$\Delta u = (x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]n\Delta x,$$
$$\Delta^2 u = (x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]n(n-1)\Delta x^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n u = n(n-1)\ldots 2.1\,\Delta x^n.$$

Toutes les différences suivantes sont nulles.

Si l'on avait

$$u = \frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]},$$

on trouverait

$$\Delta u = \frac{-n\Delta x}{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)},$$

$$\Delta^2 u = \frac{n(n+1)\Delta x^2}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n+1)\Delta x]},$$

$$\Delta^3 u = \frac{-n(n+1)(n+2)\Delta x^3}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n+2)\Delta x]};$$

et ainsi de suite indéfiniment.

213. La formule générale (1) devient, dans le cas de $u = x^n$,

$$\Delta^m u = (x+m\Delta x)^n - m[x+(m-1)\Delta x]^n$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}[x+(m-2)\Delta x]^n \ldots \mp m(x+\Delta x)^n \pm x^n.$$

Si $m = n$, le second membre est égal à $1.2.3\ldots,\ n\Delta x^n$, quel que soit x. Si, dans ce cas, on fait $x = 0$, on obtient,

quel que soit le nombre entier n,

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \ldots \mp n + 1.2.3\ldots n.$$

Si l'on a $m > n$, $\Delta^m u$ est nul, et l'on a, en faisant $x = 0$,

$$m^n - m(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^n + \ldots \mp m = 0.$$

Ces deux formules remarquables sont utiles dans la théorie des nombres

214. Soient maintenant

$$u = a^x,$$

on aura

$$\Delta u = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1);$$

donc

$$\Delta^2 u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2,$$

$$\Delta^3 u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^m u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^m.$$

215. Soit

$$u = \log x,$$

on aura

$$\Delta u = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

216. Soit

$$u = \sin(ax + b),$$

$$\Delta u = \sin(ax + a\Delta x + b) - \sin(ax + b)$$

$$= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right).$$

Si $u = \cos(ax + b)$, on aura

$$\Delta u = \cos(ax + a\Delta x + b) - \cos(ax + b)$$

$$= -2\sin\frac{a\Delta x}{2}\sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right).$$

Au moyen de ces deux formules, on obtiendra

$$\Delta^n \sin(ax+b) = -4\sin^2\frac{a\Delta x}{2}\sin(ax+a\Delta x+b),$$

et, en général,

$$\Delta^{2n}\sin(ax+b) = \pm 2^{2n}\left(\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^{2n}\sin(ax+na\Delta x+b),$$

$$\Delta^{2n+1}\sin(ax+b) = \pm 2^{2n+1}\left(\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^{2n+1}\cos[ax+(n+\tfrac{1}{2})a\Delta x+b];$$

les signes supérieurs devant être pris lorsque n est pair, et les signes inférieurs quand n est impair.

On ferait un calcul semblable pour $\cos ax$.

217. La différence $m^{ième}$ $\Delta^m u$ peut s'exprimer généralement au moyen des dérivées de u. On peut aussi la représenter par une formule symbolique très-simple.

On a d'abord

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots.$$

Si l'on change u en Δu, on aura $\Delta^2 u$, et il est facile de voir qu'aucun terme ne renfermera une dérivée d'ordre inférieur au second. En continuant ainsi, on reconnaît que $\Delta^m u$ sera de la forme suivante :

$$\Delta^m u = A\frac{d^m u}{dx^m}\Delta x^m + A_1\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\Delta x^{m+1} + \ldots,$$

les coefficients $A, A_1, \ldots$ étant indépendants de la forme de la fonction u.

Pour les déterminer, posons $u = e^x$, l'équation deviendra, en supprimant le facteur e^x,

$$(e^{\Delta x} - 1)^m = A\Delta x^m + A_1\Delta x^{m+1} + \ldots;$$

et, comme Δx est indéterminé, les coefficients des mêmes

puissances devront être égaux dans les deux membres; on connaîtra donc A, A_1,....

La valeur de $\Delta^m u$ peut se représenter par une formule symbolique, en observant que le second membre de la dernière équation se changerait dans la valeur de $\Delta^m u$ si l'on substituait $\frac{du}{dx}\Delta x$ à Δx, et que, dans les puissances de $\frac{du}{dx}$, l'exposant du numérateur fût changé en indice de différentiation. On aura donc, dans ce sens,

$$\Delta^m u = \left(e^{\frac{du}{dx}\Delta x} - 1\right)^m.$$

218. Lorsqu'on sait trouver la différence de deux fonctions, il est facile de trouver celle de leur produit, ou de leur quotient, au moyen des formules

$$\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$

$$\Delta\frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Si l'on considérait les produits de plus de deux facteurs, la formule se compliquerait rapidement. Dans le cas où ils seraient égaux, on trouverait immédiatement

$$\Delta(u^n) = nu^{n-1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}\Delta u^2 + \ldots + \Delta u^n.$$

Calcul inverse des différences.

219. L'objet qu'on se propose dans ce calcul est de remonter de la différence d'une fonction à cette fonction même; ou, plus généralement, de déterminer une fonction quand on connaît une relation entre elle, ses différences d'ordre quelconque et la variable indépendante.

La différence d'une quantité indépendante de la variable

étant zéro, il s'ensuit que, lorsqu'on aura trouvé une fonction d'après une différence donnée, on pourra lui ajouter une constante arbitraire, et l'on aura une solution plus générale de la question. Mais ce ne serait pas la plus générale, comme dans le calcul infinitésimal ; et, pour l'obtenir, il faudrait ajouter à la fonction trouvée la fonction la plus générale ayant pour différence zéro.

Or, si l'on donne à x l'accroissement Δx, toute fonction périodique de x ayant Δx pour période prendra un accroissement nul, à partir d'une valeur quelconque de x; et, réciproquement, il n'y a qu'une pareille fonction qui soit dans ce cas pour toute valeur de x. On voit donc que, lorsqu'on donne l'expression de la différence d'une fonction de x, relative à la différence Δx de cette variable, il suffira de connaître une fonction particulière qui satisfasse à la question ; et l'on obtiendra la solution la plus générale en lui ajoutant une fonction périodique arbitraire, ayant pour période la différence donnée Δx.

On sait que toute fonction périodique peut être représentée par une série convergente, dont le terme de rang $n+1$ a la forme

$$A_n \sin\frac{2n\pi x}{l} + B_n \cos\frac{2n\pi x}{l},$$

l étant la grandeur de la période. On voit donc que, dans le problème inverse des différences, la constante arbitraire sera remplacée par une série dont le premier terme sera constant, et le terme de rang $n+1$,

$$A_n \sin\frac{2n\pi x}{\Delta x} + B_n \cos\frac{2n\pi x}{\Delta x}.$$

C'est là ce que nous désignerons, pour abréger, sous la dénomination de *constante arbitraire*.

Nous représenterons par Σu la fonction générale dont



la différence première est u; par $\Sigma^2 u$, celle dont la différence seconde est u, et ainsi de suite.

220. Si l'on considère une valeur quelconque x_n de la variable et une autre valeur x telle que $x_n = x + n\Delta x$, n étant un nombre entier quelconque, il est facile d'exprimer l'accroissement que prend la fonction $F(x)$ dont la différence est u, lorsque la variable passe de x à x_n; car il est la somme des accroissements correspondants aux valeurs $x, x + \Delta x, \ldots, x + (n - 1)\Delta x$, et sa valeur est, par conséquent,

$$u + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1};$$

on a donc

$$F(x_n) = F(x) + u + u_1 + \ldots + u_{n-1}.$$

La fonction $F(x)$, dont la différence est u, peut être considérée comme renfermant une constante arbitraire, ou plutôt comme étant elle-même une constante arbitraire, si l'on particularise la valeur x.

Si on la désigne par C, et qu'on représente par Σu_n la fonction la plus générale qui a pour différence u_n, on aura la formule suivante :

$$(1) \qquad \Sigma u_n = C + u + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

221. Il est nécessaire d'observer que la fonction périodique qui entre dans C devra être traitée comme une quantité indépendante de x, dans les intégrations. En effet, supposons qu'on cherche la fonction la plus générale dont la différence soit la fonction φ, dont la période est Δx. Si l'on considère une valeur quelconque de x, et toutes celles qui en diffèrent d'un multiple quelconque de Δx, les valeurs correspondantes de la fonction cherchée seront les mêmes que si φ était remplacée par une constante égale à sa valeur relative à la première valeur de z. Donc, en traitant φ comme on traiterait une quan-

tité indépendante de x, on aura la fonction dont la différence est φ.

On peut d'ailleurs le vérifier bien facilement. En effet, la fonction dont la différence est une quantité a, indépendante de x, est $\frac{ax}{\Delta x} + C$, C désignant une constante arbitraire dans le sens déjà défini.

Or la différence de $\frac{\varphi . x}{\Delta x}$ est φ; donc $\frac{\varphi . x}{\Delta x} + C$ sera la fonction la plus générale ayant pour différence φ; et comme elle ne diffère de la précédente que par le changement de a en φ, il s'ensuit que ces fonctions périodiques doivent être traitées dans les intégrations comme les constantes proprement dites.

Intégration des fonctions.

222. Nous commencerons par faire observer que tout facteur constant peut être placé indifféremment sous le signe Σ, ou en dehors; et que l'intégrale Σ d'une somme est la somme des intégrales des parties qui la composent.

Cherchons d'abord l'intégrale de x^m, c'est-à-dire la fonction qui croît de x^m quand on y donne à x l'accroissement Δx, et que nous désignons par Σx^m; pour cela, remarquons que l'on a

$$\Delta(x^{m+1}) = (m+1)x^m\Delta x + \frac{(m+1)(m)}{1.2}x^{m-1}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^{m+1};$$

prenons maintenant l'intégrale de chaque membre, et considérons la constante arbitraire comme renfermée dans les sommes indiquées; nous obtiendrons

$$x^{m+1} = (m+1)\Delta x \Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-2} + \ldots + \Delta x^{m+1}\Sigma 1,$$

d'où

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma x^m = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \dfrac{m\Delta x}{1.2}\Sigma x^{m-1} \\ \quad - \dfrac{m(m-1)\Delta x^2}{1.2.3}\Sigma x^{m-2} - \ldots - \dfrac{\Delta x^m}{m+1}\Sigma 1. \end{cases}$$

Si l'on donne successivement à m les valeurs 0, 1, 2, etc.; on obtient, en désignant par C une constante arbitraire,

$$(3)\quad \begin{cases} \sum 1 = \dfrac{x}{\Delta x} + C, \\ \sum x = \dfrac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}x + C, \\ \sum x^2 = \dfrac{x^3}{3\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \dfrac{\Delta x}{6}x + C, \\ \sum x^3 = \dfrac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \dfrac{\Delta x}{4}x^2 + C, \\ \sum x^4 = \dfrac{x^5}{5\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \dfrac{\Delta x}{3}x^3 - \dfrac{\Delta x^3}{30}x + C. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Connaissant Σx^m, on pourra déterminer $\Sigma^2 x^m$ en cherchant, d'après les formules précédentes, l'intégrale de chacune des parties de Σx^m, et ajoutant ensuite une constante arbitraire. On trouvera ainsi $\Sigma^3 x^m$, $\Sigma^4 x^m$, etc., et à chaque intégration il s'introduira une nouvelle constante arbitraire.

223. Nous avons obtenu précédemment la formule

$$\Delta[x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)] \\ = (x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)(n+1)\Delta x;$$

donc

$$\sum(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x) \\ = \frac{1}{(n+1)\Delta x}x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x) + C.$$

Nous avons encore trouvé

$$\Delta\left[\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}\right]=\frac{-(n+1)\Delta x}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n+1)\Delta x]};$$

donc

$$\sum\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n+1)\Delta x]}$$
$$=\frac{-1}{(n+1)\Delta x.x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}+C.$$

224. Déterminons maintenant Σa^x. Nous avons vu que l'on avait

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x}-1);$$

on aura donc, en intégrant les deux membres, puis divisant par $a^{\Delta x}-1$,

$$\sum a^x=\frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+C,$$

et, par suite,

$$\sum^n a^x=\frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^n}+\Sigma^{n-1}C.$$

$\Sigma^{n-1}C$ se déterminera par le moyen des équations (3), en cherchant successivement Σ^1C, Σ^2C, etc.

225. Nous avons trouvé

$$\Delta\sin(ax+b)=2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b\right),$$

$$\Delta\cos(ax+b)=-2\sin\frac{a\Delta x}{2}\sin\left(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b\right).$$

Intégrant les deux membres, et remplaçant $x+\frac{\Delta x}{2}$ par x,

on obtient

$$\sum \sin(ax+b) = -\frac{1}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(ax+b-\frac{a\Delta x}{2}\right) + C,$$

$$\sum \cos(ax+b) = \frac{1}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(ax+b-\frac{a\Delta x}{2}\right) + C.$$

226. *Développements de l'intégrale Σ en séries.* — Nous avons trouvé précédemment la formule

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \ldots.$$

Si l'on suppose que la valeur u corresponde à $x=0$ et que u_n corresponde à $x = n\Delta x$, et soit désigné par u_x, on aura

$$u_x = u + \frac{x}{\Delta x}\Delta u + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots.$$

Soit

$$\Delta u_x = v, \quad u_x = \Sigma v, \quad \Delta u = v_0,$$

on aura

$$\sum v = C + \frac{x}{\Delta x} v_0 + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)}{1.2}\Delta v_0 + \ldots,$$

formule qui donne l'intégrale de v au moyen des valeurs de v et de ses différences, relatives à $x=0$, et de la constante arbitraire C, qui est la valeur que doit avoir Σv pour $x=0$.

Si les différences deviennent nulles, à partir d'un certain ordre, la série est composée d'un nombre fini de termes.

Si l'on demandait l'intégrale seconde d'une fonction, on connaîtrait la différence seconde de l'intégrale. Ainsi, dans le développement de u_x, on connaîtrait $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., et l'on pourrait prendre arbitrairement u et Δu.

Posant

$$\Delta^2 u_x = v, \quad u_x = \Sigma^2 v, \quad \Delta^2 u = v_0,$$

on aurait

$$\sum^2 v = C + C' \frac{x}{\Delta x} + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)}{1.2} v_0 + \ldots,$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. On déterminerait ainsi une somme d'un ordre quelconque, au moyen de la fonction donnée v et de ses différences, dans lesquelles on ferait $x = 0$. Il est facile de voir que l'on pourrait partir de toute autre valeur particulière de x.

227. On peut encore exprimer l'intégrale Σu au moyen de l'intégrale $\int u dz$, et des fonctions u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc.

En effet, le théorème de Taylor donne

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

d'où

$$u = \Delta x \sum \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots.$$

Si l'on prend toutes les sommes nulles pour $x = x_0$, et qu'on désigne par u_0 la valeur de u correspondante à x_0, on aura

$$u - u_0 = \Delta x \sum \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots;$$

d'où l'on tire

$$\sum \frac{du}{dx} = \frac{u - u_0}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} - \ldots.$$

Si l'on remplace successivement u par $\int_{x_0}^{x} u dx$ et par $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., on obtient

$$\sum u = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} u dx - \frac{\Delta x}{1.2}\sum\frac{du}{dx} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum\frac{d^2u}{dx^2} - \ldots,$$

$$\sum\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x}\frac{du}{dx} - \frac{\Delta x}{1.2}\sum\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum\frac{d^4u}{dx^4} - \ldots,$$

$$\sum\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x}{1.2}\sum\frac{d^4u}{dx^4} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum\frac{d^5u}{dx^5} - \ldots,$$

. . . .

les termes en dehors des signes Σ devant être pris entre les mêmes limites x_0, x.

Reportant dans la valeur de Σu celles de $\sum\frac{du}{dx}$, $\sum\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., on obtient une équation de la forme

$$\sum u = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} u dx - \frac{u-u_0}{2} + A\Delta x\frac{du}{dx} + B\Delta x^2\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots.$$

On déterminera les coefficients A, B, etc., en posant $u = e^x$ et $x_0 = -\infty$, ce qui donne l'identité

$$\frac{1}{e^{\Delta x} - 1} = \left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{1}{2} + A\Delta x + B\Delta x^2 + \ldots\right).$$

Le développement du premier membre fera connaître immédiatement les coefficients A, B, C.... Or il est facile de démontrer que tous ceux qui multiplient les puissances paires de Δx sont nuls. Pour cela, nous ferons passer le terme $-\frac{1}{2}$ dans le premier membre; il suffira alors de faire voir que l'expression résultante jouit de la propriété de changer de signe sans changer de valeur lorsque l'on y change Δx en $-\Delta x$; ou, en d'autres termes, que l'on

a identiquement

$$\frac{1}{e^{\Delta x}-1}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{e^{-\Delta x}-1}-\frac{1}{2}=\frac{e^{\Delta x}}{e^{\Delta x}-1}-\frac{1}{2};$$

ce qui se vérifie immédiatement.

On a donc

$$B=0,\quad D=0,\quad F=0\ldots.$$

On trouvera ensuite

$$A=\frac{1}{12},\quad C=-\frac{1}{720},\ldots,$$

et, par suite,

$$(1)\left\{\begin{aligned}\sum u=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}udx-\frac{u-u_0}{2}+\frac{\Delta x}{12}\left[\frac{du}{dx}-\left(\frac{du}{dx}\right)_0\right]\\ -\frac{\Delta x^3}{720}\left[\frac{d^3u}{dx^3}-\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients numériques qui multiplient $\frac{\Delta x}{2}$, $\frac{\Delta x^3}{2.3.4}$, $\frac{\Delta x^5}{2.3.4.5.6}$, etc., se nomment les *nombres de Bernoulli*. Leurs valeurs sont

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_3=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{1}{42},\quad B_7=\frac{1}{30},\quad B_9=\frac{5}{66},\ \text{etc.}$$

La formule de B_{2p-1} est assez compliquée.

En faisant usage de ces nombres, la formule (1) devient

$$(2)\left\{\begin{aligned}\Sigma u=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}udx-\frac{u-u_0}{2}+B_1\frac{\Delta x}{1.2}\left[\frac{du}{dx}-\left(\frac{du}{dx}\right)_0\right]\\ -B_3\frac{\Delta x^3}{1.2.3.4}\left[\frac{d^3u}{dx^3}-\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Sommation des séries.

228. Si l'on considère la suite des valeurs que prend une fonction u de x, lorsque x croît par degrés égaux, depuis une certaine valeur jusqu'à une autre, on aura une série dont la différence sera la fonction u, dans laquelle on donnera à x sa dernière valeur augmentée de Δx.

En effet, posons

$$x = n\Delta x, \qquad \text{et} \qquad Su_n = u + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

le premier terme u correspondant à $x = 0$.

Si l'on augmente x de Δx, n augmente de 1, et la série augmente de u_{n+1}; elle est donc renfermée dans l'expression générale de Σu_{n+1}, et l'on a

$$Su_n = \Sigma u_{n+1} + c, \qquad \text{ou} \qquad Su_n = \Sigma u_n + u_n + c,$$

la constante arbitraire devant être déterminée par la condition que les deux membres soient égaux pour une certaine valeur de n.

Si l'on suppose les accroissements de la variable égaux à l'unité, ce qu'on peut toujours faire par un changement de variable, on aura

$$Su_x = \Sigma u_x + u_x + c = \Sigma u_{x+1} + c.$$

Appliquons cette formule à la recherche de la somme de quelques suites.

229. Supposons d'abord $u_x = x^m$, c'est-à-dire cherchons la somme des puissances m des nombres entiers, depuis 0 jusqu'à x; on trouvera, en faisant usage de la formule que nous avons donnée pour Σx^m, et observant que la constante doit y être supposée nulle,

$$Sx = 1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{x(x+1)}{1.2},$$

$$Sx^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1.2.3},$$

$$Sx^3 = 1 + 8 + 27 + \ldots + x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2(x+1)^2}{4},$$

$$Sx^4 + 1 + 16 + 81 + \ldots + x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x,$$

$$Sx^5 = 1 + 32 + 243 + \ldots + x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2.$$

230. Nous avons trouvé précédemment

$$\Delta . x(x + \Delta x) \ldots [x + (n-1)\Delta x]$$
$$= (x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \ldots [x + (n-1)\Delta x] n\Delta x.$$

Donc, en changeant n en $n+1$,

$$\sum (x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \ldots (x + n\Delta x)$$
$$= \frac{1}{(n+1)\Delta x} . x(x + \Delta x) \ldots (x + n\Delta x) + c.$$

Si l'on considère de même la formule déjà trouvée

$$\Delta \frac{1}{x(x+\Delta x) \ldots [x + (n-2)\Delta x]} = \frac{-(n-1)\Delta x}{x(x+\Delta x) \ldots [x + (n-1)\Delta x]},$$

on aura, en intégrant,

$$\sum \frac{1}{x(x + \Delta x) \ldots [x + (n-1)\Delta x]}$$
$$= -\frac{1}{(n-1)\Delta x} \cdot \frac{1}{x(x + \Delta x) \ldots [x + (n-2)\Delta x]} + c.$$

D'après cela, il est facile de sommer les suites dont les termes généraux sont les expressions que nous venons d'intégrer, et l'on obtient les formules suivantes :

$$S(x+1)(x+2) \ldots (x+n) = \Sigma(x+2)(x+3) \ldots (x+n+1) + c$$
$$= \frac{1}{n+1}(x+1)(x+2) \ldots (x+n+1),$$

$$S\frac{1}{(x+1)(x+2) \ldots (x+n)} = \Sigma \frac{1}{(x+2)(x+3) \ldots (x+n+1)} + c$$
$$= \frac{1}{1.2 \ldots (n-2)(n-1)^2} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+2)(x+3) \ldots (x+n)},$$

en supposant que le premier terme de chacune de ces deux suites corresponde à $x = 0$.

231. Passons aux fonctions transcendantes, et cherchons d'abord Sa^x.

Nous avons trouvé

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x} - 1},$$

et l'on doit avoir

$$Sa^x = \Sigma a^{x + \Delta x} + c;$$

donc

$$Sa^x = \frac{a^{x + \Delta x}}{a^{\Delta x} - 1} + c.$$

Si le premier terme de la suite correspond à $x = 0$, on devra avoir

$$1 = \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x} - 1} + c, \quad \text{d'où} \quad c = -\frac{1}{a^{\Delta x} - 1}.$$

232. Déterminons encore $S\sin(ax+b)$, $S\cos(ax+b)$. On a

$$\begin{aligned} S\sin(ax + b) &= \Sigma \sin(ax + a\Delta x + b) + c \\ &= -\frac{1}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}\cos\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right) + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\cos(ax + b) &= \Sigma \cos(ax + a\Delta x + b) + c \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}\sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right) + c. \end{aligned}$$

Si les séries doivent commencer à $x = 0$, on trouvera, pour la première,

$$c = \frac{\cos\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}},$$

et, pour la seconde,

$$c = -\frac{\sin\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}};$$

et, par suite,

$$\mathrm{S}\sin(ax+b) = \frac{\cos\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right) - \cos\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{ax + a\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{ax}{2} + b\right)}{\sin\frac{a\Delta x}{2}},$$

$$\mathrm{S}\cos(ax+b) = \frac{\sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right) - \sin\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{ax + a\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{ax}{2} + b\right)}{\sin\frac{a\Delta x}{2}}.$$

Formules d'interpolation.

233. Lorsque l'on connaît un certain nombre de valeurs d'une fonction, correspondantes à des valeurs données de la variable x, et que l'on veut déterminer celles qui se rapportent à des valeurs intermédiaires de x, l'opération qui y conduit se nomme interpolation. L'objet qu'on se propose, en général, dans cette recherche n'est pas d'avoir des valeurs exactes, mais d'obtenir le plus simplement possible des valeurs qui aient un degré suffisant d'approximation.

Dans le n° 226 nous avons trouvé la formule

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} u_x = u + \frac{x}{\Delta x}\Delta u + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u \\ + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots \end{aligned} \right.$$

u désigne la valeur de la fonction, pour $x=0$; et les valeurs de x croissent par intervalles constants égaux à Δx. Cette série se termine à $\Delta^n u$ si la différence de l'ordre n est constante.

Or, si l'on donne les valeurs $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$, et, par suite, u, Δu, $\Delta^2 u, \ldots$, $\Delta^n u$, on pourra se proposer de trouver la fonction u_x par la condition de reproduire les valeurs particulières u, $u_1, \ldots$, u_n, lorsqu'on donnera à x les valeurs 0, $\Delta x, \ldots$, $n\Delta x$, et, de plus, d'avoir sa différence $n^{ième}$ constante, ce qui simplifiera la formule.

Ainsi la formule (1), arrêtée à $\Delta^n u$, donnera pour u_x une fonction du degré m en x, qui satisfera aux conditions demandées. Et, si on la considère comme exacte, elle fera connaître les valeurs de u_x correspondantes à une valeur arbitraire de x. Mais il est convenable de ne l'employer que pour des valeurs comprises entre 0 et $n\Delta x$, à moins que l'on ne sache que les différences des ordres supérieurs à n peuvent être négligées sans erreur sensible.

Si la première valeur u de la fonction correspondait à $x=x_0$ et non à $x=0$, la formule (1) ne subsisterait plus, et l'on devrait y remplacer x par $x-x_0$.

234. Lorsqu'on connaît u, $\Delta u, \ldots$, $\Delta^n u$, et que $\Delta^n u$ est constante, on formera chacune des diverses valeurs de $\Delta^{n-1} u$ en ajoutant $\Delta^n u$ à la précédente. On obtiendra de même chacune des valeurs de $\Delta^{n-2} u$ en ajoutant à la précédente sa différence, et ainsi de suite, jusqu'aux diverses valeurs de u, depuis la première jusqu'à l'infini.

Ce procédé est employé pour la formation des Tables, soit d'après un certain nombre de termes connus entre lesquels on veut en placer d'autres, soit d'après une équation exacte, mais d'une application peu commode.

235. Quelque rapprochés que soient les termes consécutifs d'une Table, on a souvent besoin d'en considérer d'intermédiaires, et l'on peut, la plupart du temps, considérer les différences secondes comme nulles. Dans ce cas, en supposant la valeur de x comprise entre x_0 et $x_0 + \Delta x$, la formule (1) donnera, en y remplaçant x par $x - x_0$,

$$u_x = u + \frac{x - x_0}{\Delta x} \Delta u.$$

Si u_x était donné et que x fût l'inconnue, on tirerait de là

$$x = x_0 + \frac{u_x - u}{\Delta u} \Delta x.$$

Si l'on ne peut négliger que les différences troisièmes, on prendra un terme de plus dans la formule (1). Dans ce cas, la formule ne donnerait pas aussi facilement x d'après u_x, parce que l'équation est du second degré en x: la difficulté serait encore bien plus grande si l'on prenait un plus grand nombre de termes. On emploie alors un procédé d'approximation bien connu : on néglige d'abord les termes qui renferment $x - x_0$ à des puissances supérieures à la première, ce qui donne, comme dans le premier cas, $x - x_0 = \frac{u_x - u}{\Delta u} \Delta x$; puis on substitue cette valeur approchée dans le coefficient de la première puissance de $x - x_0$, mise en facteur dans tous les termes négligés; et l'on obtient une valeur plus exacte de $x - x_0$, qu'on substitue de la même manière; et ainsi de suite.

On pourrait encore tirer la valeur de $x - x_0$ en faisant

usage de tous les termes où il entre, et regardant comme connus les autres facteurs; on appliquerait ensuite le même procédé d'approximations successives, et l'on obtiendrait un degré d'exactitude du même ordre que par l'autre moyen.

236. La formule (1) suppose que les valeurs de x croissent par degrés égaux, ce qui n'arrive pas toujours. Nous allons faire connaître une formule qui donne la valeur de la fonction, lorsque l'on connaît les valeurs u_0, u_1, $u_2,\ldots,u_n$ qu'elle prend quand x a les valeurs arbitraires

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n.$$

Nous prendrons encore une fonction entière et rationnelle de x, de degré n; elle renfermera $n+1$ coefficients indéterminés, et l'on pourra, par conséquent, l'assujettir aux $n+1$ conditions données.

Soit donc

$$u_x = \alpha + 6x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^n,$$

on aura

$$u_0 = \alpha + 6x_0 + \gamma x_0^2 + \ldots + \mu x_0^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = \alpha + 6x_n + \gamma x_n^2 + \ldots + \mu x_n^n.$$

D'après la théorie des équations du premier degré, les valeurs de α, $6,\ldots,\mu$ contiendront u_0, $u_1,\ldots,u_n$ en facteurs à leurs différents termes, de sorte que u_x pourra se mettre sous la forme

$$u_x = \mathrm{X}u_0 + \mathrm{X}_1u_1 + \mathrm{X}_2u_2 + \ldots + \mathrm{X}_nu_n.$$

Or u_x se réduit à u_0 pour $x = x_0$; on y satisfera donc si X devient alors égal à 1 et si X_1, $\mathrm{X}_2,\ldots$, X_n deviennent nuls, c'est-à-dire s'ils sont divisibles par $x - x_0$. Il en serait de même pour chacune des autres valeurs de x; on prendra donc pour X le produit d'une constante par tous les fac-

teurs $x-x_0$, $x-x_1,\ldots,x-x_n$, excepté $x-x_0$; pour X_1 le produit d'une autre constante par les mêmes facteurs, excepté $x-x_1$; et ainsi de suite. Par là on voit qu'en substituant chacune des valeurs de x, il ne restera que le terme où entrera la valeur correspondante de u_x; et il ne reste plus qu'à rendre égal à l'unité son coefficient. Soit x_p une quelconque des valeurs données de x, et u_p la valeur correspondante de u_x.

X_p renfermant les facteurs $x-x_0,\ldots, x-x_n$, excepté $x-x_p$, il est évident que, si on le prend égal à ce produit divisé par la valeur que prend ce même produit quand on y fait $x=x_p$, X_p se réduira à 1 pour $x=x_p$.

Les quantités $X, X_1,\ldots, X_n$ seront donc ainsi déterminées de manière que l'équation du degré n en x qui donne la valeur de u_x soit satisfaite par les $n+1$ couples de valeurs données, et aucune autre expression du même degré ne pourrait devenir égale aux mêmes valeurs $u_0,\ldots, u_n$ pour les mêmes valeurs de x, sans coïncider avec elle.

La formule cherchée sera donc

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} u_x &= u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\\ &+u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots+u_n\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned}\right.$$

Approximation des quadratures, des cubatures et des rectifications.

237. Toutes ces questions se ramènent, comme nous l'avons vu, à une ou plusieurs intégrations par rapport à une seule variable, entre des limites déterminées. Il suffit donc de considérer l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

On peut, pour en déterminer la valeur, prendre la for-

mule (1) du n° 227, qui donne, en remplaçant Δx par δ, et supposant $u = f(x)$,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \delta\left(\Sigma u + \frac{u - u_0}{2}\right) - \frac{\delta^2}{12}\left[f'(x) - f'(x_0)\right]$$
$$+ \frac{\delta^4}{720}\left[f'''(x) - f'''(x_0)\right] + \ldots.$$

Si l'on suppose δ assez petit pour qu'on puisse négliger δ^2, on aura simplement

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + u_2 + \ldots + \frac{u}{2}\right)\delta.$$

Si l'on regarde $f(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe, cette dernière expression est celle de la somme des trapèzes compris entre les ordonnées successives, les cordes de la courbe et l'axe des x.

238. On peut encore employer la formule d'interpolation (1) du n° 233, pour représenter l'ordonnée de la courbe, puis l'intégrer entre les limites données ; ce qui n'offrira aucune difficulté, puisque cette expression est entière et rationnelle.

L'emploi de cette formule revient à remplacer la courbe dont il s'agit par la parabole de degré $n - 1$, qui a n points communs avec elle.

Quelquefois, au lieu de prendre cette dernière courbe, on considère une suite de paraboles du second degré passant chacune par trois des points donnés, et l'on remplace les parties correspondantes de l'aire cherchée par les aires de ces diverses paraboles, comprises entre les deux ordonnées extrêmes qui s'y rapportent. Il faut, pour cela, que l'intervalle $b - a$ soit partagé en un nombre pair de parties ; et chaque parabole donnera l'aire ayant pour base deux de ces parties consécutives.

L'équation de la parabole du second degré, passant par

les points dont les abscisses sont o, Δx, $2\Delta x$, et les ordonnées y_0, y_1, y_2, est

$$y = y_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\Delta^2 y_0;$$

son aire entre les ordonnées y_0, y_2 est

$$\Delta x(2y_0 + 2\Delta y_0 + \tfrac{1}{3}\Delta^2 y_0),$$

ou

$$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

On aura de même l'aire comprise entre y_2 et y_4, entre y_4 et y_6, et enfin entre y_{2n-2} et y_{2n}; et il faudra faire la somme des expressions suivantes, dans lesquelles y_0, $y_1, \ldots, y_{2n}$ désignent les valeurs de $f(x)$ relatives aux valeurs a, $a + \Delta x, \ldots$, et b ou $a + n\Delta x$:

$$\frac{\Delta x}{3}(y_0 \quad + 4y_1 \quad + y_2),$$

$$\frac{\Delta x}{3}(y_2 \quad + 4y_3 \quad + y_4),$$

. . . .

$$\frac{\Delta x}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

L'aire cherchée, ou l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, aura ainsi pour valeur approchée,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + y_{2n}) + \frac{2\Delta x}{3}(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + \frac{4\Delta x}{3}(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}).$$

COURBURE DES SURFACES.

239. Une surface ne pouvant avoir, en général, un contact du second ordre avec une sphère, on ne peut rapporter la courbure des surfaces à celle de la sphère, comme on a rapporté la courbure des lignes à celle du cercle. Pour se faire une idée de la courbure d'une surface en un de ses points, l'un des moyens qu'on emploie consiste à faire des sections dans cette surface par des plans passant par le point que l'on considère, et à déterminer la courbure des lignes ainsi obtenues. Les sections qu'il paraît le plus naturel d'examiner sont celles qui sont faites par des plans normaux à la surface : c'est par elles que nous commencerons ; nous verrons ensuite comment leur courbure détermine immédiatement celle des autres.

Soit $z = F(x, y)$ l'équation de la surface ; nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'on ait choisi le plan tangent au point que l'on considère, pour plan des x et y, et la normale pour axe des z ; les propriétés indépendantes des axes, que nous découvrirons ainsi, auront le même degré de généralité que si le système d'axes avait été tout autre.

Un cercle situé dans un plan passant par l'axe des z, et tangent, à l'origine des coordonnées, à la section faite par ce plan dans la surface, aura pour équations

$$y = mx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0;$$

d'où

$$x^2(1 + m^2) + z^2 - 2Rz = 0.$$

Pour qu'il y ait un contact du second ordre avec la section, il faut que $\frac{d^2z}{dx^2}$ ait la même valeur dans l'une et l'autre courbe. Or la dernière équation différentiée deux fois donne

$$1 + m^2 + (z - R)\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

A l'origine, on a

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0;$$

d'où résulte

$$1 + m^2 - R\frac{d^2z}{dx^2} = 0, \quad R = \frac{1+m^2}{\frac{d^2z}{dx^2}},$$

$\frac{d^2z}{dx^2}$ n'étant pas une dérivée partielle. Pour en obtenir la valeur, il faut remplacer y par mx dans l'équation de la surface, puis différentier deux fois par rapport à x, et faire x, y, z nuls : on trouve ainsi, pour valeur de la dérivée totale $\frac{d^2z}{dx^2}$,

$$r + 2sm + tm^2,$$

r, s, t désignant respectivement les dérivées partielles

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Le rayon de courbure R de la section normale aura donc pour expression

(1) $$R = \frac{1+m^2}{r + 2sm + tm^2}.$$

Il restera toujours fini et de même signe si l'on a $s^2 - rt < 0$: la courbure sera donc toujours dans le même sens. Il deviendra infini et changera de signe si $s^2 - rt > 0$; la courbure changera alors de sens. Si $s^2 - rt = 0$, il devient infini sans changer de signe.

240. Si l'on cherche le maximum et le minimum de cette expression, relativement à la variable m, on connaîtra le plus grand et le plus petit rayon de courbure des sections normales. L'équation qui détermine ces valeurs particulières est

(2) $$sm^2 + (r - t)m - s = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont réelles et de

signes contraires; substituées dans la seconde dérivée de R, elles donnent des résultats de signes différents, et, par conséquent, correspondent, l'une à un maximum, l'autre à un minimum algébrique.

Le produit de ces deux racines étant -1, les deux plans qui renferment les sections de plus petite et de plus grande courbure, et que nous nommerons sections principales, sont rectangulaires entre eux.

241. Si l'on prend ces deux plans pour plans des x, z et des y, z, l'expression générale de R se trouve simplifiée. Car les deux racines de l'équation (2) devant être alors o et ∞, on devra avoir $s=0$, et, par suite,

$$R=\frac{1+m^2}{r+tm^2}.$$

Dans le cas actuel, deux valeurs de R suffiraient pour déterminer r et t; ainsi, quand on connaît la direction des sections principales, les courbures de deux sections normales quelconques de position connue déterminent toutes les autres.

Si l'on désigne par ρ, ρ' les rayons maximum et minimum, on aura

$$\rho=\frac{1}{r},\quad \rho'=\frac{1}{t}.$$

On peut donc exprimer R en fonction de ρ, ρ', m, et l'on obtient ainsi

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{1+m^2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{m^2}{\rho'}\right),$$

ou, en posant $m=\tang\alpha$,

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho}\cos^2\alpha+\frac{1}{\rho'}\sin^2\alpha.$$

Si l'on désigne par v la courbure d'une section quelconque, et par v', v'' celles des sections principales, elles

seront respectivement égales à $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$, comme nous l'avons vu dans le calcul différentiel, et l'équation précédente devient

$$(3) \qquad v = v' \cos^2\alpha + v'' \sin^2\alpha,$$

d'où l'on voit que les deux courbures principales déterminent celles de toutes les sections normales.

On déduit de cette équation plusieurs conséquences importantes :

1°. Si l'on mène par la normale deux plans également inclinés sur le plan d'une des sections principales, la courbure des deux sections sera la même ;

2°. Si l'on mène deux plans également inclinés sur les plans respectifs des deux sections principales, de quelque côté que ce soit, la somme des courbures de ces sections sera constante et égale à la somme des courbures des sections principales.

Car, en les désignant par v et v_1, on aura

$$v = v' \cos^2\alpha + v'' \sin^2\alpha, \quad v_1 = v' \sin^2\alpha + v'' \cos^2\alpha,$$

d'où

$$v + v_1 = v' + v''.$$

Si les deux angles α sont pris dans le même sens, les plans sont rectangulaires : d'où l'on voit que *la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires entre elles est constante.*

3°. Si l'on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a $v = \frac{v' + v''}{2}$. Donc la courbure de chacune des sections dont les plans partagent en deux parties égales les angles des plans des sections principales, est égale à la moyenne entre les deux courbures principales ; et la sphère qui passe par les cercles osculateurs de ces sections donne la même somme que la sur-

face, pour les courbures de deux sections normales rectangulaires. On voit encore que deux plans également inclinés sur un de ces plans moyens donnent des sections dont la somme des courbures est $v' + v''$, puisque ces plans font des angles égaux avec ceux des sections principales.

242. *Indicatrice.*—Si, à partir d'un point quelconque d'une surface, on prend sur la normale une longueur infiniment petite, et que par son extrémité on mène un plan perpendiculaire à la normale, il coupe la surface suivant une courbe infiniment petite, que M. Ch. Dupin a considérée le premier, et qu'il a nommée *indicatrice*. Toutes les propriétés que nous venons de démontrer s'en déduisent très-simplement, ainsi que beaucoup d'autres qu'il convient d'étudier dans les ouvrages de l'auteur. Il est facile de reconnaître d'abord que cette courbe est du second degré, si l'on néglige les quantités infiniment petites par rapport à ses dimensions; ce qui signifie que, lorsque cette courbe tend à se réduire à un point, à mesure que son plan se rapproche du plan tangent, une courbe finie qui lui serait semblable aurait pour limite une section conique.

En effet, si l'on prend la normale pour axe des z, l'équation de la surface, rapportée à des axes rectangulaires, sera généralement

$$z = \tfrac{1}{2} rx^2 + sxy + \tfrac{1}{2} ty^2 + \ldots,$$

et l'on sait qu'on peut choisir dans le plan des x, y deux axes rectangulaires particuliers tels, que le rectangle xy ne se trouve pas dans le second membre. En les choisissant, l'équation de la surface sera de la forme

$$z = \tfrac{1}{2} rx^2 + \tfrac{1}{2} ty^2 + \ldots.$$

On sait encore que si les coefficients r, t sont inégaux, il

n'y a qu'un seul système d'axes rectangulaires qui jouisse de la propriété de faire disparaître le rectangle xy; et que, s'ils sont égaux, il y en a une infinité.

Si maintenant on fait $z = \alpha$, α étant infiniment petit, et qu'on se borne aux termes du second degré en x et y, on aura pour équation de la section, qui est l'indicatrice,

$$(1) \qquad rx^2 + ty^2 = 2\alpha,$$

équation qui représente une ellipse ou une hyperbole, dont le centre est sur la normale.

Soient A (*fig.* 7) le point de la surface, AN la normale, $AO = \alpha$, et BC l'intersection du plan de l'indicatrice par un plan normal quelconque. Le centre de courbure de cette section est la limite de la rencontre de AN avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AC; et si l'on appelle R le rayon du cercle osculateur, on aura $R = \frac{\overline{OC}^2}{2OA}$, ou, en désignant par 2λ le diamètre BC de l'indicatrice que nous supposerons elliptique, $R = \frac{\lambda^2}{2\alpha}$.

On conclut de là que les sections dont les plans passeront par les axes de l'indicatrice auront la courbure maximum ou minimum. Toutes les autres conséquences s'en déduiront facilement, et l'expression de R en fonction de r, s, t s'obtiendra comme précédemment pour un plan quelconque ayant pour équation $y = mx$: car on aura

$$\lambda^2 = \frac{2\alpha(1 + m^2)}{r + tm^2}, \quad \text{et, par suite,} \quad R = \frac{1 + m^2}{r + tm^2}.$$

Si l'indicatrice était une hyperbole, le rayon de courbure deviendrait infini lorsque le plan de la section passerait par une de ses asymptotes, puis aurait une expression négative si l'on ne changeait pas de signe α. Il faudra donc, pour l'avoir positif, mener le plan de l'indicatrice de

l'autre côté du plan tangent; ce qui montre que la courbure des sections a changé de sens. Les deux indicatrices que l'on obtient ainsi sont deux hyperboles conjuguées, et leurs axes réels correspondent aux sections de plus grande courbure parmi toutes celles qui sont situées du même côté du plan tangent.

Si l'on avait conservé le signe de l'expression de la courbure, on aurait, comme nous l'avions dit en général, un maximum et un minimum pour les courbures principales.

L'indicatrice pourra encore être du genre de la parabole, qui comprend le cas de deux droites parallèles : c'est ce dernier cas qui arrivera si l'on a

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad t = 0.$$

Cela ne signifiera pas que la section de la surface par le plan parallèle au plan tangent n'est pas une parabole; car une parabole dont le paramètre est infiniment petit, étant considérée à une distance finie de son sommet, se confond sensiblement avec deux droites parallèles. Ainsi, lors même que la section serait une parabole, l'indicatrice se présenterait comme l'ensemble de deux droites parallèles, excepté dans le cas où le sommet de cette parabole serait à une distance infiniment petite du point que l'on considère sur la surface : ce cas ne peut être qu'exceptionnel, puisqu'il n'a pas lieu dans l'hypothèse la plus ordinaire où l'équation de la surface peut être développée comme nous l'avons supposé.

Lorsque l'indicatrice est du genre de la parabole, il n'y a qu'une seule direction pour laquelle la courbure soit nulle, ou le rayon de courbure infini; c'est celle de l'axe de la parabole.

Cette direction est celle de la courbure minimum; la courbure maximum est dans la direction perpendiculaire.

243. La courbure des sections obliques se ramène à celles des sections normales. En effet, soit HK (*fig.* 8) l'intersection du plan de l'indicatrice et d'un plan passant par la tangente en A, à la section normale BAC, et faisant un angle ε avec le plan de cette section. La corde HK étant parallèle à la tangente menée en A à la courbe HAK, la perpendiculaire AP abaissée de A sur HK, partage cette ligne en deux parties que l'on regardera comme égales, parce qu'elles ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre : OP est perpendiculaire à HK, et du second ordre comme AO, puisque $\frac{\text{OP}}{\text{OA}} = \text{tang}\,\varepsilon$. On peut donc regarder les longueurs BC, HK comme égales; et le rayon de courbure de la section HAK, qui a pour valeur $\frac{\overline{\text{PK}}^2}{2\text{PA}}$, sera égal à $\frac{\overline{\text{OC}}^2}{2\text{PA}}$; il est donc égal à celui de la section normale BAC multiplié par $\frac{\text{AO}}{\text{PA}}$ ou $\cos\varepsilon$. D'où l'on déduit ce théorème remarquable, dû à Meunier, que *le rayon de courbure d'une section oblique s'obtient en projetant sur le plan de cette section le rayon de courbure de la section normale qui a la même tangente.*

244. La position particulière que nous avons donnée aux axes a rendu plus facile la démonstration des propriétés précédentes; mais il est nécessaire de traiter la question pour une position quelconque des axes, parce qu'on peut avoir à déterminer les sections principales en un point quelconque d'une surface, rapportée à des axes rectangulaires quelconques.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque d'une surface donnée, et α, β, γ les angles formés avec les axes par une tangente à la surface en ce point, on aura $\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$, puisque l'équation du plan

tangent est $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$, et que les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes une droite située dans ce plan. Si l'on substitue à $\cos\gamma$ sa valeur $\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2 6}$, on obtient

$$(1) \quad (1 + p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos 6 + (1 + q^2)\cos^2 6 = 1.$$

C'est la condition pour que les angles α, 6 appartiennent à une tangente quelconque.

Si par le point (x', y', z'), et par un autre point infiniment voisin, pris sur la courbe qui se rapporte à cette tangente, on mène deux plans normaux à cette courbe, ils se couperont suivant l'axe du cercle osculateur de cette courbe, et les équations de cette droite seront

$$(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz' = 0,$$
$$(x - x')d^2x' + (y - y')d^2y' + (z - z')d^2z' = ds'^2.$$

Cette ligne, étant dans le plan normal à la surface, rencontre la normale, dont les équations sont

$$x - x' + p(z - z') = 0, \quad y - y' + q(z - z') = 0.$$

Les coordonnées x, y, z du point de rencontre seront données par les équations

$$z - z' = \frac{1}{D}, \quad y - y' = -\frac{q}{D}, \quad x - x' = -\frac{p}{D},$$

en posant

$$d^2z' - pd^2x' - qd^2y' = Dds'^2.$$

La valeur de D peut être transformée en différentiant l'équation

$$dz' = pdx' + qdy',$$

ce qui donne

$$d^2z' = pd^2x' + qd^2y' + rdx'^2 + 2sdx'dy' + tdy'^2,$$

et, par suite,

$$D = r\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + 2s\,\frac{dx'}{ds'}\cdot\frac{dy'}{ds'} + t\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2$$
$$= r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos 6 + t\cos^2 6.$$

On voit par là que D reste le même si α et 6 ne changent pas; il en est donc ainsi du point de rencontre de la normale à la surface, et de l'axe du cercle osculateur de toutes les sections obliques, dont le plan passe par la même tangente.

Il résulte de là que toutes ces sections ont leurs centres de courbure sur une circonférence dont le plan est perpendiculaire à leur tangente commune, et dont le diamètre est la ligne qui joint le point de contact au point fixe, que nous venons de trouver sur la normale. Ce point est donc lui-même le centre de courbure de la section normale; et l'on voit que les rayons de courbure de toutes les sections qui ont la même tangente sont les projections de celui de la section normale sur leurs plans respectifs.

D'après les valeurs que nous avons trouvées pour les coordonnées du centre de courbure de la section normale, son rayon de courbure aura pour expression

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D},$$

ou

(2) $$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos 6 + t\cos^2 6}.$$

245. Le maximum ou le minimum de R, relativement à la variation de α et 6, correspond au minimum ou au maximum du dénominateur, et sera donné par l'équation

$$(r\cos\alpha + s\cos 6)\,d.\cos\alpha = -(s\cos\alpha + t\cos 6)\,d.\cos 6;$$

on éliminera $d.\cos\alpha$ et $d.\cos\beta$ en différentiant l'équation (1), ce qui donne

$$[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta]\,d.\cos\alpha$$
$$= -[(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha]\,d.\cos\beta,$$

et, divisant ces deux équations par ordre, il vient

$$(3)\qquad \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{t\cos\beta + s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}.$$

Les équations (1), (2), (3) déterminent les valeurs de α, β, R, qui se rapportent aux sections principales.

Pour faire plus commodément ce calcul, on multipliera par $\cos\alpha$ les deux termes de la fraction qui forme le premier membre de l'équation (3), et par $\cos\beta$ les deux termes du second membre, puis on ajoutera les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux; la fonction résultante, qui est $\frac{D}{1}$, sera égale à chacun des membres de l'équation (3), ce qui donne

$$(3)\,bis\quad \begin{cases} r\cos\alpha + s\cos\beta = D[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta], \\ t\cos\beta + s\cos\alpha = D[(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha], \end{cases}$$

ou

$$(4)\qquad \begin{cases} [D(1+p^2) - r]\cos\alpha = (s - pqD)\cos\beta, \\ [D(1+q^2) - t]\cos\beta = (s - pqD)\cos\alpha. \end{cases}$$

Ces deux équations, multipliées membre à membre, donnent

$$[D(1+p^2) - r][D(1+q^2) - t] = (s - pqD)^2,$$

ou

$$(1+p^2+q^2)D^2 - D[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs] + rt = s^2.$$

Cette équation fera connaître les deux valeurs de D rela-

tives aux sections principales; et, comme on a

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D},$$

l'équation qui donnera les rayons de courbure de ces sections sera

$$(5)\left\{\begin{array}{r}(rt - s^2)R^2 - R\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]\\ + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.\end{array}\right.$$

Enfin les valeurs de α et β seront déterminées par l'équation (1) et l'une des équations (4).

246. Si l'on veut connaître les points particuliers de la surface où les sections principales, et, par suite, toutes les sections normales ont la même courbure, il faut exprimer que les deux racines de l'équation (5) sont égales. Il semble d'abord que l'équation qui en résulte entre p, q, r, s, t, jointe à celle de la surface, déterminerait une ligne; mais il est facile de voir que l'égalité de ces racines conduit à deux équations.

En effet, l'équation de condition peut se mettre sous la forme

$$\left[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r + 2pq\left(\frac{pqr}{1 + p^2} - s\right)\right]^2 + 4(1 + p^2 + q^2)\left(\frac{pqr}{1 + p^2} - s\right)^2 = 0;$$

or elle ne peut évidemment être satisfaite qu'en posant

$$\frac{pqr}{1 + p^2} - s = 0, \quad \text{et} \quad (1 + p^2)t - (1 + q^2)r = 0,$$

équations qui peuvent s'écrire ainsi :

$$(6) \qquad \frac{r}{1 + p^2} = \frac{t}{1 + q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Ces deux équations, jointes à celle de la surface, déter-

minent un nombre fini de points, auxquels on a donné le nom d'*ombilics*. On les aurait obtenues en exprimant que les valeurs de D, données par les équations (4), sont indépendantes de α et 6, comme cela doit être pour que la courbure de toutes les sections normales soit la même.

247. *Tangentes conjuguées.* — Si l'on trace une courbe quelconque sur une surface, et que, par tous ses points, on mène les plans tangents à la surface, ces plans, par leurs intersections successives, détermineront une surface développable circonscrite à la première. Ses arêtes sont inclinées sur la courbe de contact suivant une loi remarquable que M. Dupin a reconnue le premier, et que nous allons faire connaître.

La question que nous nous proposons est donc celle-ci : *Le point de contact d'un plan tangent à une surface quelconque se déplaçant suivant une certaine direction, trouver à la limite la droite suivant laquelle ce plan tangent sera coupé par le plan infiniment voisin.* Ces deux directions sont tangentes à la surface, et M. Ch. Dupin leur a donné le nom de *tangentes conjuguées*.

Pour cela, nous prendrons pour origine le point de contact de la surface avec le plan tangent que l'on considère, et dans lequel nous prendrons les axes des x et y : nous choisirons, comme dans le nº **242**, pour directions de ces deux axes, celles pour lesquelles le rectangle xy ne se trouvera pas dans le développement de z suivant les puissances ascendantes de ces variables. Nous aurons alors, pour $x = 0$, $y = 0$, les conditions

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad s = 0.$$

Soient x', y', z' les coordonnées infiniment petites du point de contact d'un second plan tangent; la direction suivant laquelle se sera déplacé le point de contact fera, avec l'axe des x, un angle dont la tangente sera la limite de $\frac{y'}{x'}$, lorsque

x', y' tendront vers zéro; nous désignerons cette limite par m. L'équation du plan tangent au point $x'y'z'$ sera

$$z - z' = p'(x - x') + q'(y - y'),$$

et si l'on observe qu'à l'origine on a

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad s = 0,$$

il s'ensuivra, en observant que x', y' sont infiniment petits,

$$p' = rx', \quad q' = ty', \quad z' = \frac{rx'^2}{2} + \frac{ty'^2}{2},$$

et l'équation du plan deviendra

$$z = rx'x + ty'y - \frac{rx'^2}{2} - \frac{ty'^2}{2};$$

faisant $z = 0$ pour avoir l'intersection avec le premier plan tangent, qui est celui des x et y, il vient, en remplaçant y' par mx' et divisant par x',

$$rx + tmy - \frac{x'}{2}(r + m^2t) = 0.$$

Pour avoir la droite cherchée, il suffit de faire $x' = 0$ dans cette équation, et il vient

(7) $$rx + tmy = 0$$

pour équation de la tangente conjuguée de celle dont la direction est déterminée par m. Si donc on désigne par m' la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x, on aura

$$m' = -\frac{r}{tm};$$

d'où

$$mm' = -\frac{r}{t}.$$

On voit donc que les directions de deux tangentes conju-

guées quelconques sont celles de deux diamètres conjugués de la section conique ayant pour équation

$$rx^2 + ty^2 = c,$$

c désignant une constante quelconque. Cette courbe n'est autre que l'indicatrice au point que l'on considère, et dont nous avons donné l'équation dans le n° **242**. Car on désigne sous cette dénomination générale, non-seulement la section infiniment petite, faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent, à une distance infiniment petite, mais encore à toute section conique semblable à celle qui est donnée par l'intersection de ce plan avec la surface.

L'angle des tangentes conjuguées est droit quand elles sont dirigées suivant les deux diamètres conjugués rectangulaires de l'indicatrice, et, par conséquent, suivant les directions des courbures maximum et minimum.

Nous nous bornerons à cette propriété fondamentale des tangentes conjuguées, qui montre un nouvel usage de l'indicatrice dans l'étude générale des surfaces, et nous renverrons, pour plus de détails, aux Mémoires mêmes de l'auteur.

Lignes de courbure.

248. Si, par tous les points d'une ligne tracée sur une surface, on mène des normales à cette surface, elles sont, en général, dans des plans différents, et la plus courte distance de deux d'entre elles, correspondantes à des points infiniment voisins sur la surface, est un infiniment petit du même ordre que la distance de ces deux points et que l'angle de ces mêmes normales.

Mais on peut se proposer de déterminer les lignes qu'il faudrait tracer sur la surface pour que la plus courte distance des normales successives fût, non pas nulle, mais

infiniment petite par rapport à la distance des points correspondants de la surface, et à l'angle des deux normales. Les normales se trouveront alors dans le même cas que les tangentes à une courbe à double courbure; et leur ensemble formera une surface développable. Soient x', y', z'. les coordonnées d'un point quelconque d'une surface, les équations de la normale en ce point seront

$$x - x' + p(z - z') = 0, \qquad y - y' + q(z - z') = 0.$$

Le point d'intersection de cette ligne et de la normale au point infiniment voisin, dont les coordonnées sont $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$, sera donné par la combinaison de ces deux équations et de leurs différentielles par rapport à x', y', z', qui sont

$$- dx' - pdz' + (rdx' + sdy')(z - z') = 0,$$
$$- dy' - qdz' + (tdy' + sdx')(z - z') = 0,$$

ou, en remplaçant dz' par $pdx' + qdy'$,

$$(8) \begin{cases} (1 + p^2)dx' + pqdy' = (rdx' + sdy')(z - z'), \\ (1 + q^2)dy' + pqdx' = (tdy' + sdx')(z - z'). \end{cases}$$

La condition pour que les deux normales se rencontrent, s'obtiendra en exprimant que les valeurs de $z - z'$ sont les mêmes dans ces deux dernières équations; on trouve ainsi

$$(9) \qquad \frac{(1 + p^2)dx' + pqdy'}{rdx' + sdy'} = \frac{(1 + q^2)dy' + pqdx'}{tdy' + sdx'},$$

équation qui est la même que l'équation (3), et donne, par conséquent, pour $\frac{dy'}{dx'}$, les deux valeurs qui se rapportent aux tangentes des sections normales de courbures maximum et minimum. Seulement il faut bien observer que l'équation (9) n'exprime pas que les deux normales se coupent réellement, puisqu'on a négligé les termes du

second ordre; mais que l'on trouvera pour x, y, z des valeurs qui satisferont aux équations de la première normale, et telles qu'augmentées de quantités d'ordre supérieur au premier, elles satisferaient à la seconde. Elle exprime donc que la plus courte distance des deux normales est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

Si l'on élimine $\frac{dy'}{dx'}$, entre les équations (8), il vient

$$(10)\qquad \frac{1+p^2-r(z-z')}{pq-s(z-z')}=\frac{pq-s(z-z')}{1+q^2-s(z-z')}.$$

Cette équation, jointe aux équations de la normale

$$x-x'+p(z-z')=0,\qquad y-y'+q(z-z')=0,$$

déterminera les coordonnées x, y, z du point de rencontre des deux normales infiniment voisines; et l'on aura la surface, lieu de tous ces points de rencontre, en éliminant x', y', z' entre ces trois équations et celle de la surface donnée.

249. Les équations (8) ne diffèrent des équations (3) *bis* que par le changement de $\frac{1}{D}$ en $(z-z')$. La valeur de $(z-z')\sqrt{1+p^2+q^2}$, ou la partie de la normale comprise entre le point de la surface et le point de rencontre avec la normale infiniment voisine, sera donc égale à $\frac{1}{D}\sqrt{1+p^2+q^2}$ ou à R. Ainsi, les distances du point de la surface aux points où les normales infiniment voisines se rencontrent sont égales aux rayons des courbures principales. Ces deux points de rencontre ne sont donc autre chose que les centres des courbures principales.

250. Cela posé, déterminons la courbe qui, en chacun de ses points, jouit de la propriété d'être tangente à la section principale, et qui est telle, par conséquent,

que les normales à la surface, menées par deux points infiniment voisins, pris sur cette courbe, se rencontrent. Les coordonnées x', y', z' d'un quelconque de ces points satisferont à l'équation (9) et à celle de la surface : cette dernière donne z' en fonction de x', y', et, si l'on substitue cette valeur dans l'équation (9), on aura une équation du premier ordre entre x', y', et du second degré par rapport à $\frac{dy'}{dx'}$; on l'intégrera, et l'on aura deux équations finies, renfermant chacune une constante arbitraire, que l'on déterminera en exprimant que chacune de ces deux équations entre x' et y' est satisfaite par les coordonnées du point de la surface par lequel on voudra faire passer les courbes.

C'est ainsi qu'on détermine les équations de ces lignes remarquables auxquelles on a donné le nom de *lignes de courbure*.

251. Cherchons maintenant l'équation de la surface développable, lieu des normales à la surface donnée, menées par tous les points d'une de ses lignes de courbure.

Les équations d'une quelconque de ces normales seront

$$x - x' + p(z - z') = 0, \qquad y - y' + q(z - z') = 0,$$

et les coordonnées x', y', z' devront satisfaire à l'équation de la surface donnée et à l'intégrale de l'équation (9). Si donc on élimine x', y', z' entre ces quatre équations, l'équation finale entre x', y', z' sera celle de la surface cherchée.

Les deux surfaces obtenues ainsi pour les deux lignes de courbure qui passent par un même point se coupent à angle droit; et, en général, toutes celles qui se rapportent à l'un des systèmes de lignes de courbure coupent

à angle droit toutes celles qui se rapportent à l'autre système.

252. Enfin, si l'on veut connaître le lieu des points de rencontre des normales consécutives, ou l'arête de rebroussement de la surface qui est le lieu de ces normales, il faudra joindre l'équation (10) à celles qui ont déterminé l'équation de cette surface. On en éliminera x', y', z' au moyen des deux équations de la normale, et de celle de la surface donnée ; on aura ainsi une seconde équation entre x, y, z, qui, jointe à celle de la surface développable, déterminera l'arête de rebroussement qui correspond à la ligne de courbure que l'on considère.

Cette seconde équation entre x, y, z étant indépendante de la ligne de courbure, est satisfaite par les arêtes de rebroussement relatives à toutes les lignes de courbure de la surface donnée ; elle représente donc le lieu de ces arêtes, ou de tous les points de rencontre des normales consécutives de la surface donnée.

253. Les points de rencontre des normales consécutives sont, comme nous l'avons dit, les centres des cercles osculateurs des sections principales : mais il faut bien se garder de croire qu'ils soient les centres des cercles osculateurs des lignes de courbure ; car les normales qui y passent sont tangentes à une même courbe, propriété qui n'appartient jamais aux normales qui passent par les centres de courbure d'une courbe qui n'est pas plane. Or, en général, les lignes de courbure ne sont pas planes ; et même elles pourraient l'être sans que leurs cercles osculateurs se confondissent nécessairement avec ceux des sections principales : on en voit un exemple très-simple dans les parallèles d'une surface de révolution. Il faut, en outre, que leurs plans osculateurs soient normaux, et que, par conséquent, les lignes de courbure soient les lignes de plus courte distance sur la surface.

Application au paraboloïde elliptique.

254. Soient $2a$, $2b$ les paramètres des paraboles principales d'un paraboloïde dont l'axe est dans la direction des z positifs; l'équation de cette surface sera

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

et l'on aura

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{b}, \quad r = \frac{1}{a}, \quad t = \frac{1}{b}, \quad s = 0.$$

L'équation (8), qui appartient aux deux lignes de courbure, devient ainsi, en posant $\frac{a}{b} = A$, $a(a-b) = B$,

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 + B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Si l'on différentie cette équation, on obtient

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 + B\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Si l'on tire de la précédente la valeur de $x^2 - Ay^2 + B$, et qu'on la reporte dans la dernière, on trouve

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Divisant par $xy\frac{dy}{dx}$, elle devient

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0.$$

Les trois termes étant des dérivées exactes, on aura, en intégrant,

$$\text{l}.\frac{1}{C}\frac{dy}{dx} = \text{l}.y - \text{l}.x = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = C\frac{x}{y},$$

d'où l'on tire, en intégrant de nouveau,

$$y^2 = Cx^2 + C'.$$

Mais cette équation, avec deux constantes arbitraires, est l'intégrale de l'équation du second ordre, et doit renfermer, comme cas particulier, celle de la proposée. En substituant cette valeur de y dans l'équation du premier ordre, on trouvera entre C et C' une condition qui réduira ces constantes à une seule. Cette condition est $C' = \frac{BC}{1 + AC}$, de sorte que l'équation générale des lignes de courbure du paraboloïde est

$$y^2 = Cx^2 + \frac{BC}{1 + AC},$$

ou, en substituant à A et B leurs valeurs,

$$y^2 = Cx^2 + \frac{ba(a-b)C}{b + aC}.$$

Ces courbes se projetteront donc sur le plan des x et y suivant des hyperboles ou des ellipses, suivant que C sera positif ou négatif.

La valeur de cette constante sera déterminée si l'on donne les coordonnées x', y', du point de la surface par lequel on veut faire passer la ligne de courbure : on aura ainsi l'équation

$$y'^2 = Cx'^2 + \frac{ba(a-b)C}{b + aC},$$

ou

$$ax'^2C^2 + [bx'^2 - ay'^2 + ab(a-b)]C - by'^2 = 0;$$

d'où l'on tire pour C des valeurs réelles inégales, l'une positive et l'autre négative, que nous désignerons par α et -6. Les équations des deux lignes de courbure qui se croisent au point donné ont donc pour équations

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{b+a\alpha}$$

et

$$y^2 = -6x^2 + \frac{ab(a-b)6}{a6-b}.$$

Si l'on suppose $a > b$, la parabole, située dans le plan des x et z, est celle qui a le plus grand paramètre. Les hyperboles suivant lesquelles se projettent les lignes de courbure ont alors leur axe réel dans la direction de l'axe des y, et sa longueur est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{b+a\alpha}}$; elle est maximum pour $\alpha = \infty$, et sa valeur est $\sqrt{b(a-b)}$; les hyperboles se réduisent alors à l'axe des y. On voit donc qu'en portant sur l'axe des y, de part et d'autre de l'origine, des longueurs égales à $\sqrt{b(a-b)}$, on aura les limites entre lesquelles tombent les sommets des hyperboles, qui sont les projections d'un des systèmes de lignes de courbure.

L'équation qui représente les projections des lignes de l'autre système donne toujours des ellipses réelles, parce que l'on a $a6 - b > 0$, ou $6 > \frac{b}{a}$. En effet, si l'on substitue $-\frac{b}{a}$ à C dans l'équation qui détermine cette constante, on trouve un résultat négatif; et, comme elle n'a qu'une seule racine négative, cette racine est numériquement plus grande que $\frac{b}{a}$; ainsi l'on a $6 > \frac{b}{a}$, quels que soient x', y', et l'équation ne donne que des ellipses réelles.

Le demi-axe des x est égal à $\sqrt{\frac{ab(a-b)}{a6-b}}$, et le demi-axe des y à $\sqrt{\frac{ab(a-b)6}{a6-b}}$. La valeur minimum de ce dernier correspond à $6=\infty$, et est $\sqrt{b(a-b)}$; elle donne les mêmes points déjà trouvés pour la limite supérieure des axes réels des hyperboles. Dans ce cas, l'ellipse se confond avec une partie de l'axe des y.

Si l'on a $x'=0$, une valeur de C est infinie; l'autre est positive si l'on a $y'<\sqrt{b(a-b)}$, et négative dans le cas contraire. Dans le premier cas, les deux lignes de courbure sont une hyperbole et l'axe des y; dans le second cas, elles se composent d'une ellipse et de l'axe des y.

Si $y'=0$, une des valeurs de C est nulle, et l'autre négative. Les deux lignes de courbure sont alors une ellipse et l'axe des x.

255. Les équations qui déterminent les ombilics deviennent, dans le cas que nous examinons,

$$xy=0, \quad a(y^2+b^2)=b(x^2+a^2);$$

ce qui donne les deux systèmes

$$x=0,\ y=\pm\sqrt{b(a-b)}, \quad \text{et} \quad y=0,\ x=\pm\sqrt{a(b-a)}.$$

On voit qu'un seul donne des coordonnées réelles ; et, dans le cas actuel, c'est le premier, puisque nous avons supposé $a>b$. Il y a donc deux ombilics dans le paraboloïde elliptique; ils se trouvent sur la parabole principale qui a le plus petit paramètre, et ne sont autre chose que les deux points que nous avons déjà reconnus comme limite des sommets des lignes de courbure.

256. Si le paraboloïde est de révolution, les ombilics se confondent avec le sommet. Les deux valeurs de C

deviennent $\frac{y'^2}{x'^2}$ et -1; et les équations des lignes de courbure sont

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'^2}x^2, \qquad \text{et} \qquad y^2 + x^2 = 0;$$

la première représente tous les plans passant par l'axe de révolution, et la seconde, des cylindres ayant pour base, sur le plan xy, des cercles de rayon arbitraire, ayant leur centre au sommet. Les lignes de courbure sont donc les méridiens et les parallèles, comme cela a lieu dans toutes les surfaces de révolution. Quant au lieu des centres de courbure, il se compose évidemment de l'axe de révolution et de la surface engendrée par la révolution de la développée de la courbe méridienne autour du même axe.

Nouvelle théorie de la courbure des surfaces.

257. Pour avoir une idée nette de la forme d'une surface, dans le voisinage d'un quelconque de ses points, il ne suffit pas de connaître la forme des sections faites par des plans passant par la normale en ce point, quoique ces courbes déterminent tous les points de cette surface. Il est encore nécessaire de connaître la loi suivant laquelle varie la direction de la surface elle-même, ou de son plan tangent quand on marche suivant une quelconque de ces courbes, ou quand on passe de l'une à l'autre. Ainsi, la courbure des sections normales, d'où se déduit d'ailleurs celle des sections obliques, ne suffit pas pour donner, dans le voisinage du point, une connaissance approfondie de la forme d'une surface. Elle ne fait connaître que la loi d'inflexion des courbes tracées sur cette surface, et non la loi d'inflexion de la surface elle-même.

L'ingénieuse théorie des tangentes conjuguées ne suffit

pas non plus pour remplir cet objet; car, quoique la dépendance des directions de ces deux tangentes soit liée d'une manière intime à la forme de la surface, elle ne saurait en donner une idée nette, parce qu'elle en est une conséquence très-éloignée.

On voit donc ce qui manque encore dans l'étude que nous avons faite jusqu'ici de la forme des surfaces. Nous la compléterons au moyen d'une considération nouvelle, due à M. Bertrand. C'est de son Mémoire que nous avons extrait les diverses propositions que nous allons exposer, et qui constituent réellement une nouvelle théorie de la courbure des surfaces.

258. Soient A (*fig.* 9) un point quelconque d'une surface, et AZ la normale. Menons par AZ des plans dans toutes les directions, et sur chaque courbe d'intersection de ces plans et de la surface prenons, à partir de A, une longueur infiniment petite, $AM = \varepsilon$; cette longueur, divisée par l'angle des tangentes extrêmes, donnera le rayon de courbure de cette courbe au point A.

Soit maintenant MN la normale à la surface en M. Sa direction sera déterminée par les angles qu'elle fait avec trois axes rectangulaires, par exemple la normale AZ, et deux droites AX, AY menées à angle droit dans le plan tangent en A. Pour obtenir des expressions plus simples pour les cosinus des angles cherchés, nous choisirons pour les axes AX, AY les deux directions pour lesquelles on a $\frac{d^2z}{dxdy}$ nul à l'origine. Ce système est unique en général; on l'obtient en faisant disparaître le rectangle xy dans le développement de la valeur de z suivant les puissances croissantes de x et y. La discussion est la même que celle que l'on fait dans la théorie des courbes du second degré; et si, après la disparition du terme renfermant xy, les coefficients de x^2 et y^2 étaient égaux, tout

système d'axes rectangulaires jouirait de la propriété de faire disparaître ce même terme. Cela posé, faisons, en général,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dz}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

on aura, à l'origine,

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0.$$

Si l'on désigne maintenant par X, Y, Z les angles que fait avec les axes la normale en un point quelconque de la surface, on aura, comme on le sait,

$$\cos X = \lambda p, \quad \cos Y = \lambda q, \quad \cos Z = -\lambda,$$

la valeur de λ étant

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

le double signe correspondant aux deux sens de la normale.

Appliquons ces formules au point M, et désignons par α l'angle que fait avec ZAX la trace AU du plan de la section sur le plan tangent; les trois coordonnées x, y, z du point M seront respectivement, en négligeant les infiniment petits du second ordre, $\varepsilon \cos\alpha$, $\varepsilon \sin\alpha$, o. Pour connaître les valeurs de λp, λq, $-\lambda$ au point M, il suffit d'ajouter à leurs valeurs en A les accroissements qu'elles subissent par les changements infiniment petits que reçoivent les coordonnées quand on passe de l'origine A au point M. Or, au point A, on a

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \lambda = 1,$$

en choisissant le signe supérieur du radical. On aura donc, au point M,

$$(1) \quad \cos X = \varepsilon r \cos\alpha, \quad \cos Y = \varepsilon t \sin\alpha, \quad \cos Z = -1,$$

les valeurs de r et t se rapportant à l'origine. Telles sont les formules très-simples qui déterminent la direction d'une normale quelconque infiniment voisine de la première. Elles forment la base de la théorie que nous allons exposer.

259. Nous avons dit que ce qu'il fallait connaître, c'était la loi suivant laquelle varie la direction de la normale à la surface dans le voisinage du point A. Or, c'est à quoi l'on parviendra en exprimant, au moyen de α et ε : 1° l'angle que fait avec AZ la projection de la normale MN sur le plan de la section; 2° l'angle de MN avec sa projection, c'est-à-dire avec le plan AZM. On peut remarquer que la première de ces deux coordonnées angulaires détermine la courbure de la section normale AZM. Considérons d'abord le premier de ces deux angles : il est complément de celui que MP forme avec AU; et, en négligeant toujours les infiniment petits de second ordre, ce dernier est le même que celui de MN avec AU, parce que le plan de l'angle infiniment petit NMP est perpendiculaire au plan ZAU, et ses côtés font des angles finis avec AU. Mais, d'après les formules (1), le cosinus de l'angle de MN avec AU, qui est égal à

$$\cos X \cos\alpha + \cos Y \sin\alpha,$$

aura pour valeur

$$\delta(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha).$$

C'est le sinus de l'angle de contingence de la section, ou cet angle lui-même. En le divisant par l'arc δ, on aura la courbure que nous désignerons par v; ce qui donnera la formule

$$(2) \qquad v = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha.$$

260. Passons maintenant au second angle NMP. Il est évidemment le complément de celui que MN fait avec la

perpendiculaire au plan ZAU. Prenons la direction de cette dernière dans le sens où elle fait avec AX l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et cherchons le cosinus positif ou négatif de l'angle qu'elle fait avec MN : ce sera le sinus de NMP, ou cet angle lui-même, considéré comme positif quand la normale MN sera du même côté de ZAU que la droite menée sous l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et négatif quand il sera du côté opposé.

L'expression de ce cosinus est

$$\cos X \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos Y \cos\alpha,$$

ou

$$\varepsilon \sin\alpha \cos\alpha\,(t - r),$$

ou encore

$$\frac{\varepsilon \sin 2\alpha}{2}\,(t - r).$$

Si donc nous désignons par ω l'angle positif ou négatif NMP, nous aurons

$$(3) \qquad \omega = \tfrac{1}{2}\varepsilon(t - r)\sin 2\alpha.$$

Les formules (2) et (3) donnent l'expression des deux quantités que nous nous proposions de déterminer; nous allons en développer les principales conséquences.

261. *Conséquences de la formule* (3). — Si nous supposons ε constant, l'angle ω variera proportionnellement au sinus du double de l'angle α; d'où il résulte immédiatement qu'il est nul pour les quatre valeurs particulières

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \pi, \quad \alpha = \frac{3\pi}{2},$$

c'est-à-dire quand le point M se déplace suivant l'une quelconque des deux directions AX, AY.

On voit de plus que l'angle ω ne peut devenir nul pour

aucune autre direction, à moins que l'on n'ait $t = r$ · auquel cas il est nul pour toute direction.

Nous obtenons ainsi cette propriété remarquable :

En tout point d'une surface quelconque, il existe deux directions rectangulaires, telles que les normales à la surface menées par les points infiniment voisins du premier dans l'une quelconque de ces deux directions, sont situées dans le plan normal conduit suivant cette direction; elles sont donc dans un plan contenant la première normale, et, par conséquent, la rencontrent. Lorsqu'il y a plus de deux directions jouissant de cette propriété, toutes les autres en jouissent.

Nous donnerons à ces deux directions remarquables la dénomination de *directions principales*. Il ne faut pas oublier que nous avons négligé les infiniment petits du second ordre. Ainsi l'on doit entendre que les normales, menées par les points situés à une distance infiniment petites les unes des autres dans ces directions, peuvent bien ne pas réellement se rencontrer, mais que leur plus courte distance, si elle n'est pas nulle, ne peut être qu'un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier.

On a donné un nom particulier aux courbes tracées sur une surface, et qui, en chacun de leurs points, ont une direction qui jouisse de la propriété que nous venons de reconnaître; on les nomme des *lignes de courbure*. On peut évidemment en faire passer deux par un point quelconque de la surface.

262. La formule (3) conduit à une proposition générale, que nous allons faire connaître, et d'où nous aurions pu déduire la précédente; mais celle-ci se présentait si naturellement, que nous avons cru devoir la faire remarquer immédiatement. Si nous considérons les deux directions déterminées par les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$, α ayant une

valeur quelconque, les deux valeurs de ω seront égales et de signes contraires; donc, en ayant égard au sens dans lequel nous avons fait voir qu'il fallait porter l'angle ω, suivant qu'il était positif ou négatif, nous pouvons établir la proposition suivante :

Si, en un point quelconque d'une surface, nous considérons deux directions rectangulaires sur lesquelles nous prenions des longueurs infiniment petites égales, et que, par leurs extrémités, nous menions des normales à la surface, ces normales feront respectivement des angles égaux avec les plans menés par la normale au premier point et chacune des deux directions; et, de plus, elles seront toutes les deux comprises dans l'angle dièdre droit que forment les deux plans, ou toutes les deux en dehors.

Cette propriété, découverte par M. Bertrand, renferme évidemment la précédente, comme il l'a fait voir. En effet, puisque le sens dans lequel il faut porter l'angle ω change en passant d'une direction à celle qui lui est perpendiculaire, il y a nécessairement une direction intermédiaire pour laquelle l'angle ω est zéro. Il est donc nul aussi pour la direction perpendiculaire à celle-ci, et l'on retombe ainsi sur la proposition précédente.

263. *Conséquences de la formule* (2). — Considérons deux directions rectangulaires quelconques correspondantes aux angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Désignant par v, v' les courbures de ces deux sections normales, nous aurons

$$v = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha,$$

$$v' = r\sin^2\alpha + t\cos^2\alpha;$$

d'où

$$v + v' = r + t.$$

On arrive donc à ce théorème remarquable :

Dans toute surface, la somme des courbures de deux sections normales faites en un même point par deux plans rectangulaires quelconques est constante.

Cette somme est donc celle qui se rapporte aux deux sections qui passent les directions principales en ce point, puisque ces directions sont rectangulaires. Les valeurs de v qui s'y rapportent s'obtiennent en donnant successivement à α les valeurs o et $\frac{\pi}{2}$; elles sont donc r et t.

On peut remarquer que l'expression de v, donnée par la formule (2), reste la même quand on change α en $2\pi - \alpha$. D'où l'on conclut que, pour deux plans normaux symétriques par rapport à l'un quelconque de ceux qui passent par les directions principales, la courbure des sections est la même.

On peut encore faire une autre observation, qui n'est pas sans intérêt : si l'on partage en parties égales infiniment petites l'espace angulaire autour d'un point quelconque d'une surface, et qu'on fasse passer des plans par ces lignes de division et la normale, la moyenne des courbures de toutes ces sections sera la demi-somme des *courbures principales,* c'est-à-dire des courbures des sections principales. Car on peut partager toutes ces sections en groupes de deux sections ayant leurs plans perpendiculaires; et comme dans chaque groupe la somme des courbures est la demi-somme des courbures principales, la moyenne générale sera aussi cette demi-somme. Enfin cette courbure moyenne n'est autre chose que celle de la section équidistante des deux sections principales. Car, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on trouve

$$v = \frac{r+t}{2}.$$

264. Lorsque les coefficients r et t sont de même signe,

auquel cas on peut les supposer positifs, puisque cela ne dépend que du sens dans lequel on prend z positif, il est facile de voir qu'il existe un maximum et un minimum pour la courbure des sections normales. En effet, la valeur de v peut se mettre sous la forme

$$v = r + (t - r)\sin^2\alpha,$$

et l'on reconnaît immédiatement que, si l'on a $t - r > 0$, la plus petite valeur de v correspond à $\alpha = 0$, et sa plus grande à $\alpha = \frac{\pi}{2}$; ces valeurs sont r et t. L'inverse a lieu si l'on a $t - r < 0$; d'où l'on conclut ce théorème :

De toutes les sections normales faites en un même point d'une surface, celles qui passent par les directions principales en ce point, présentent le maximum et le minimum de courbure.

Nous donnerons à ces deux sections particulières le nom de *sections principales.*

265. Supposons maintenant que r et t soient de signes contraires, et que r, par exemple, soit positif. A partir de $\alpha = 0$, qui donne $v = r$, v va en diminuant jusqu'à 0, qui correspond à $\tang\alpha = \frac{r}{t}$. Il devient ensuite négatif, ce qui apprend, comme nous l'avons fait remarquer, que le centre de courbure passe de l'autre côté du plan tangent. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, v prend sa valeur maximum, qui serait un minimum si l'on faisait abstraction du signe. Il passera ensuite symétriquement par les mêmes valeurs dans les trois autres angles droits. On retrouve ainsi les résultats déjà obtenus par d'autres considérations. Il en serait de même pour le cas où l'un des coefficients r, t serait nul.

Théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales.

Ce théorème consiste en ce que : *Si trois séries continues de surfaces se coupent mutuellement, et de telle manière qu'elles soient à angle droit en chaque point de leur rencontre, ces lignes d'intersection seront pour chaque surface ses lignes de courbure.*

M. Bertrand a déduit de son théorème fondamental une démonstration très-simple de cette proposition. Considérons, en effet, trois séries de surfaces orthogonales, et soient en un point A (*fig.* 10) AX, AY, AZ les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces que donnent respectivement en ce point les trois séries que l'on considère. Prenons sur ces courbes les points M, N, P à des distances infiniment petites égales du point A. En chacun de ces points les normales aux deux surfaces qui y passent sont perpendiculaires. Soient α, 6, γ et α', $6'$, γ' les angles que font respectivement avec les axes AX, AY, AZ les deux normales Mm, Mm', on aura alors

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos 6\cos 6' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Or α et α' diffèrent infiniment peu d'un angle droit, et 6, γ' sont infiniment petits : cette équation deviendra donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(a) \qquad \cos 6' + \cos\gamma = 0.$$

Soient de même α_1, 6_1, γ_1 et α'_1, $6'_1$, γ'_1 les angles correspondants respectivement aux normales Nn, Nn', et enfin α_2, 6_2, γ_2, α'_2, $6'_2$, γ'_2 ceux qui correspondent aux normales Pr, Pr' : on aura semblablement

$$(b) \qquad \cos\gamma'_1 + \cos\alpha_1 = 0,$$

$$(c) \qquad \cos\alpha'_2 + \cos 6_2 = 0.$$

Ces trois équations *a*, *b*, *c* résultent de ce que les trois surfaces sont rectangulaires en tous les points de leurs intersections respectives. Maintenant, d'après le théorème de M. Bertrand sur les normales à une même surface, on aura les trois suivantes, dont la première se rapporte à la surface qui a pour normale AX, la seconde à celle qui a pour normale AY, et enfin la troisième à celle dont la normale est AZ :

$$(d) \qquad \cos\beta_2 = \cos\gamma'_1,$$

$$(e) \qquad \cos\gamma = \cos\alpha'_2,$$

$$(f) \qquad \cos\alpha_1 = \cos\beta'.$$

La combinaison de ces équations avec les trois premières conduit facilement à la démonstration de la proposition que nous avons en vue. En effet, si nous reportons dans les premières les valeurs de trois des cosinus qui entrent dans les dernières, par exemple ceux qui forment les premiers membres, il vient

$$\cos\beta' + \cos\alpha'_2 = 0, \quad \cos\gamma'_1 + \cos\beta' = 0, \quad \cos\alpha'_2 + \cos\gamma'_1 = 0.$$

Ajoutant les deux premières et retranchant la troisième, on obtient

$$2\cos\beta' = 0, \quad \text{ou} \quad \cos\beta' = 0,$$

équation qui en entraîne immédiatement cinq autres ; de sorte que l'on a

$$\cos\beta' = 0, \quad \cos\gamma = 0, \quad \cos\alpha'_2 = 0,$$
$$\cos\beta_2 = 0, \quad \cos\gamma'_1 = 0, \quad \cos\alpha_1 = 0.$$

La première exprime que la normale M*m*′ est dans le plan ZX, et par conséquent rencontre la normale AZ ; d'où il suit que AM est dans la direction d'une ligne de courbure de la surface à laquelle AZ est normale. Il en serait de même des autres ; de sorte que ces six équations

démontrent que les trois intersections des surfaces proposées sont sur chacune d'elles dans les directions de ses lignes de courbure.

Cette propriété ayant lieu en tous les points d'une quelconque de ces courbes, elle ne sera donc autre chose qu'une ligne de courbure de chacune des surfaces dont elle est l'intersection. On peut donc énoncer le théorème suivant, qui est celui de M. Dupin :

Lorsque trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, leurs intersections ne sont autre chose que leurs lignes de courbure respectives.

Et comme dans les calculs précédents on n'a fait entrer que la considération des trois surfaces qui passent au point A, on peut énoncer le théorème suivant, qui entraîne celui de M. Dupin :

Si trois surfaces se coupent de manière à être normales en tous les points où elles se rencontrent, les courbes d'intersection seront, sur chacune des trois surfaces, tangentes aux lignes de courbure menées par le point commun aux trois surfaces.

Remarques générales sur les systèmes de droites menées par tous les points de l'espace.

266. Les propriétés que nous avons déduites de la formule (3), relativement aux normales à une même surface, sont caractéristiques ; c'est-à-dire qu'elles n'auraient pas lieu relativement à un système de droites dont la position serait déterminée pour chaque point de l'espace par des fonctions continues de ces coordonnées, mais qui ne seraient pas normales à une série de surfaces. Il n'en est pas de même des propriétés déduites de la formule (2) ; elles ne caractérisent pas spécialement les normales à une même surface. Nous allons démontrer ces propositions

remarquables, qui se trouvent encore dans le Mémoire de M. Bertrand.

Soient X, Y, Z des fonctions continues des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque : elles déterminent pour ce point une droite unique qui fait avec les axes des angles dont les cosinus c, c', c'' sont proportionnels à ces fonctions. Si l'on pose

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = D,$$

et que l'on considère toujours le sens correspondant au signe + de ce radical, ces cosinus auront pour valeurs

$$(1) \qquad c = \frac{X}{D}, \quad c' = \frac{Y}{D}, \quad c'' = \frac{Z}{D}.$$

Soient maintenant M un point quelconque de l'espace ayant pour coordonnées x, y, z; MN la direction déterminée par les équations (1); MU, MV deux directions faisant des angles droits l'une avec l'autre, et avec MN; a, a', a'' et b, b', b'' les cosinus des angles qu'elles font respectivement avec les axes. Prenons, sur ces directions, deux longueurs infiniment petites, $MD = MD = \varepsilon$, et aux points D, D' menons les droites DP, D'P', déterminées encore par les équations (1) au moyen des coordonnées de ces points respectifs.

Cela posé, nous allons démontrer d'abord la première proposition que nous avons énoncée, et qui consiste en ce que les lignes DP, D'P' ne feront des angles égaux avec les plans NMD, NMD', et dans le sens indiqué, que lorsqu'il sera possible de faire passer par un point arbitraire de l'espace une surface qui, en chacun de ses points, soit normale à la droite déterminée par les formules (1). Déterminons d'abord l'angle ω de DP avec le plan NMU, ou son complément, qui est l'angle de DP avec MV. Remarquons, pour cela, que les coordonnées du point D

seront

$$x + a\varepsilon, \quad y + a'\varepsilon, \quad z + a''\varepsilon,$$

et que les fonctions c, c', c'' de x, y, z deviendront respectivement, pour ce point,

$$(2)\quad \begin{cases} c + \varepsilon\left(a\dfrac{dc}{dx} + a'\dfrac{dc}{dy} + a''\dfrac{dc}{dz}\right), \\ c' + \varepsilon\left(a\dfrac{dc'}{dx} + a'\dfrac{dc'}{dy} + a''\dfrac{dc'}{dz}\right), \\ c'' + \varepsilon\left(a\dfrac{dc''}{dx} + a'\dfrac{dc''}{dy} + a''\dfrac{dc''}{dz}\right). \end{cases}$$

D'après ces valeurs des cosinus des angles de DP avec les axes, le cosinus de l'angle de DP avec MV, ou le sinus de l'angle ω, ou enfin cet angle lui-même, puisqu'il est infiniment petit, aura pour expression, en observant que l'on a $bc + b'c' + b''c'' = 0$,

$$\omega = \varepsilon b\left(a\frac{dc}{dx} + a'\frac{dc}{dy} + a''\frac{dc}{dz}\right) + \varepsilon b'\left(a\frac{dc'}{dx} + a'\frac{dc'}{dy} + a''\frac{dc'}{dz}\right)$$
$$+ \varepsilon b''\left(a\frac{dc''}{dx} + a'\frac{dc''}{dy} + a''\frac{dc''}{dz}\right).$$

Il est presque inutile de remarquer que, si l'on prenait le point D sur une courbe quelconque tangente à MD, la valeur de ω ne subirait aucun changement, puisque nous négligeons les infiniment petits du second ordre.

Si maintenant on veut calculer l'angle de D′P′ avec le plan NMV, et dans le même sens par rapport à ce plan, il faudra, dans l'expression précédente, changer a, a', a'' en b, b', b'', et b, b', b'' en $-a$, $-a'$, $-a''$. Si donc on prend cet angle en sens contraire, ce qui se fera en changeant les signes, on aura, en le désignant par ω',

$$\omega' = \varepsilon a\left(b\frac{dc}{dx} + b'\frac{dc}{dy} + b''\frac{dc}{dz}\right) + \varepsilon a'\left(b\frac{dc'}{dx} + b'\frac{dc'}{dy} + b''\frac{dc'}{dz}\right)$$
$$+ \varepsilon a''\left(b\frac{dc''}{dx} + b'\frac{dc''}{dy} + b''\frac{dc''}{dz}\right).$$

Ce que nous cherchons, c'est la condition pour que $\omega = \omega'$, quelle que soit la direction MU. Or, en formant la différence $\omega' - \omega$, et se rappelant les formules connues

$$ab' - ba' = c'', \qquad a''b - b''a = c', \qquad a'b'' - b'a'' = c,$$

qui résultent de ce que les trois directions en M sont rectangulaires comme les axes, on trouvera immédiatement

$$(3)\ \omega' - \omega = \epsilon\left[c''\left(\frac{dc}{dy} - \frac{dc'}{dx}\right) + c'\left(\frac{dc''}{dx} - \frac{dc}{dz}\right) + c\left(\frac{dc'}{dz} - \frac{dc''}{dy}\right)\right].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les angles ω, ω' soient égaux est donc que le second membre de cette équation soit nul ; et l'on remarquera que, *comme il ne dépend que de quantités constantes pour le même point* M, *s'il est nul pour une certaine direction choisie pour* MU, *il le sera pour toute autre*. Mais on peut, dans cette équation de condition, substituer aux quantités c, c', c'' les quantités respectives X, Y, Z qui leur sont proportionnelles. Car la forme de cette équation fait reconnaître immédiatement que l'introduction d'un facteur commun, fonction de x, y, z, dans les quantités c, c', c'', ne produirait que des termes qui se détruiraient, et un facteur commun que l'on pourrait supprimer.

Ainsi la condition analytique nécessaire et suffisante pour l'égalité des angles ω, ω' est

$$X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0.$$

Or cette condition est précisément celle de l'intégrabilité de l'expression

$$X dx + Y dy + Z dz = 0;$$

et, quand elle sera remplie, cette dernière équation représentera une série de surfaces, en chaque point des-

quelles la normale fera, avec les axes, des angles dont les cosinus seront proportionnels à Y, Z. X,

Ainsi, *l'égalité des angles* ω, ω' *en un point quelconque* M *de l'espace entraîne cette conséquence, que, par un point arbitraire, on peut faire passer une surface telle, que ses normales se confondront avec les droites du système en question.*

Cette propriété, que nous avions reconnue pour une surface quelconque, est donc *caractéristique;* elle n'appartient qu'aux normales à une surface : elle ne subsiste plus pour tout autre système de droites.

267. Le second membre de l'équation (3) ne dépendant nullement de la direction particulière de MU, il s'ensuit que la différence des angles ω, ω', qui est nulle dans le cas des normales à une même surface, est constante pour un même point, lorsque l'on considère un système quelconque de droites, déterminées en chaque point par des fonctions continues de x, y, z. Cette remarque est due à M. Sturm.

268. Passons maintenant aux propriétés résultantes de la comparaison des courbures des sections normales faites dans une surface par des plans formant entre eux un angle droit; et voyons si elles sont caractéristiques comme les précédentes, ou si elles subsistent lorsqu'au lieu des normales à une même surface, on considère un système continu quelconque de lignes droites. Dans une surface, les normales à la section ne sont autre chose que les projections des normales à la surface sur le plan de cette section, et la courbure de la section est le rapport de l'angle de deux normales infiniment voisines à l'arc compris. Nous allons généraliser cette considération pour le système de droites déterminées en chaque point de l'espace par les fonctions X, Y, Z. Pour cela, nous ferons passer par une quelconque MN de ces droites un plan quelconque

NMU, et nous projetterons sur ce plan toutes les droites du système qui se rapportent à ses différents points. Leurs directions étant déterminées en fonction des coordonnées de chaque point rapportées, par exemple, à des axes pris dans ce plan, on sait qu'il existe une série de courbes normales à ces droites, parce qu'une équation différentielle entre deux variables a toujours une intégrale; et nous considérerons celle de ces courbes qui passe par le point M. Lorsque le système général des droites deviendra celui des normales à une série de surfaces, cette courbe ne sera autre chose que la section de la surface passant en M par le plan NMU. Cela posé, la courbure v de la courbe que nous venons de déterminer s'obtiendra comme dans le cas où les droites sont normales à une même surface. On prendra sur MU une longueur infiniment petite $\text{MD} = \varepsilon$, on mènera par le point D la droite NP du système en question, et l'on cherchera le cosinus de l'angle qu'elle fait avec MU; il sera le même que celui que la projection de DP sur NMU fait avec MU, et, par conséquent, sera le sinus de l'angle de cette projection avec NM, ou cet angle même. En faisant usage des formules déjà calculées pour la direction DP, et observant d'ailleurs que

$$ac + a'c' + a''c'' = 0,$$

on a pour le cosinus de l'angle des deux directions MN, DP, ou pour l'angle de contingence de la courbe dont il s'agit :

$$\varepsilon a\left(a\frac{dc}{dx} + a'\frac{dc}{dy} + a''\frac{dc}{dz}\right) + \varepsilon a'\left(a\frac{dc'}{dx} + a'\frac{dc'}{dy} + a''\frac{dc'}{dz}\right)$$
$$+ \varepsilon a''\left(a\frac{dc''}{dx} + a'\frac{dc''}{dy} + a''\frac{dc''}{dz}\right).$$

En divisant cette expression par ε, on aurait la courbure cherchée v. Mais si, pour simplifier les calculs, on prend

la direction MN pour axe des z, on aura $a''=0$, et l'expression de v sera, en désignant par α' l'angle que fera MU avec le nouvel axe des x,

$$(4)\qquad v=\frac{dc}{dx}\cos^2\alpha+\left(\frac{dc}{dy}+\frac{dc'}{dx}\right)\sin\alpha\cos\alpha+\frac{dc'}{dy}\sin^2\alpha.$$

Or cette formule va nous démontrer les mêmes propriétés que nous ont offertes les sections normales d'une surface. En effet, si nous changeons α en $\alpha+\frac{\pi}{2}$, nous trouverons, pour la courbure v' relative au plan perpendiculaire à MMU,

$$v'=\frac{dc}{dx}\sin^2\alpha-\left(\frac{dc}{dy}+\frac{dc'}{dx}\right)\sin\alpha\cos\alpha+\frac{dc'}{dy}\cos^2\alpha;$$

d'où

$$v+v'=\frac{dc}{dx}+\frac{dc'}{dy}.$$

La somme des courbures relatives à deux plans perpendiculaires entre eux, passant par MN, est donc constante; d'où il suit déjà que, si l'une est maximum, l'autre sera minimum, et réciproquement. Mais, comme cela n'indique ni le nombre, ni la position des plans qui se rapportent à ces maxima ou minima, cherchons, en général, les valeurs de α qui peuvent donner de pareilles valeurs à v. La règle ordinaire conduit à l'équation

$$\sin 2\alpha\left(\frac{dc}{dx}-\frac{dc'}{dy}\right)=\cos 2\alpha\left(\frac{dc}{dy}+\frac{dc'}{dx}\right);$$

d'où il résulte que les valeurs de α ne construiront que deux directions, à angle droit l'une sur l'autre, et correspondant, par conséquent, l'une à un maximum et l'autre à un minimum de courbure.

On voit donc que les propriétés relatives à la courbure des sections normales ne sont pas caractéristiques pour les

surfaces; car elles se retrouvent pour tout système de directions déterminées en chaque point par des fonctions continues quelconques des coordonnées de ce point. Cette distinction, faite par M. Bertrand, entre les propriétés qui conviennent à tous les systèmes et celles qui ne conviennent qu'aux normales à une série de surfaces, mérite une attention particulière.

269. Nous terminerons cette discussion par la recherche des directions perpendiculaires à MN (*fig.* 11), suivant lesquelles il faudrait marcher pour que les droites infiniment voisines se rencontrassent. On sait, par ce qui précède, qu'il ne peut y en avoir deux rectangulaires en chaque point; car alors les droites proposées seraient normales à une même surface; mais on ignore s'il en existe, et comment elles se trouveront situées.

Soit MU une direction telle, que la droite NP du système, menée par le point D situé à une distance infiniment petite ε de M, rencontre MN, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre.

Il est nécessaire et suffisant, pour cela, que l'angle ω, exprimé par la formule (3), soit nul. Cette condition sera plus facile à interpréter si l'on prend la droite MN pour axe des z; on aura alors

$$a'' = 0, \quad b'' = 0;$$

et si l'on désigne par α l'angle de MU avec l'axe des x, d'où résultera

$$a = \cos\alpha, \quad a' = \sin\alpha, \quad b = -\sin\alpha, \quad b' = \cos\alpha,$$

l'équation qui exprime la rencontre de MN avec les droites infiniment voisines devient

$$\frac{dc}{dy}\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{dc}{dx} - \frac{dc'}{dy}\right) - \frac{dc'}{dx}\cos^2\alpha = 0,$$

ou, en divisant par $\cos^2\alpha$,

$$(g) \qquad \frac{dc}{dy}\tang^2\alpha + \left(\frac{dc}{dx} - \frac{dc'}{dy}\right)\tang\alpha - \frac{dc'}{dx} = 0.$$

Cette équation étant du second degré, prouve qu'en chaque point il y a deux directions, au plus, jouissant de la propriété en question, si l'on excepte les points singuliers pour lesquels les trois coefficients seraient nuls, auquel cas toute valeur conviendrait pour α. On peut d'ailleurs facilement vérifier que ces deux directions, lorsqu'elles existent, ne peuvent être à angle droit en chaque point, si les droites du système ne sont pas normales à une même surface. En effet, la condition d'intégrabilité de l'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

n'ayant pas lieu, on n'a pas, à l'origine des coordonnées,

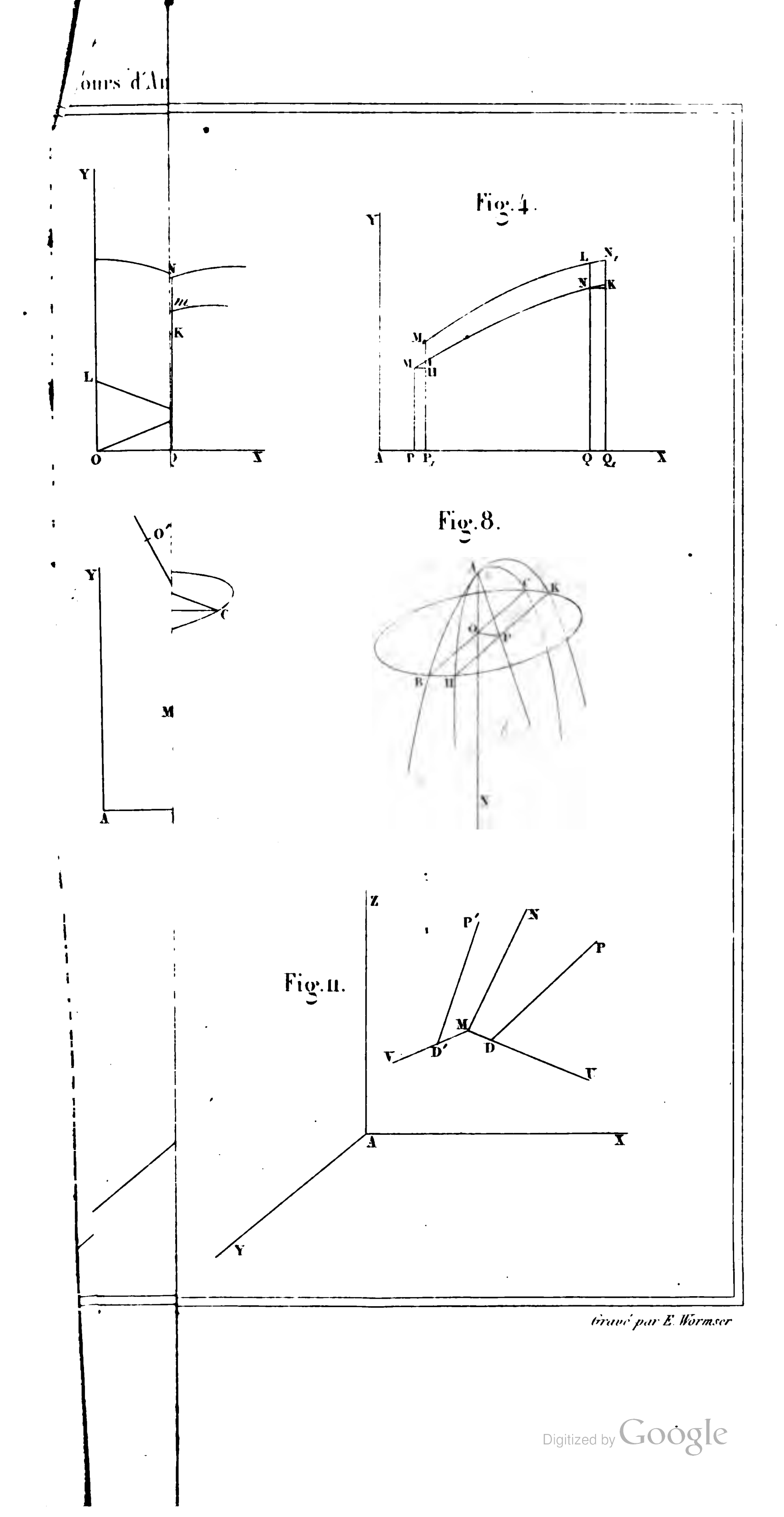
$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dc}{dy} = \frac{dc'}{dx};$$

donc le produit des racines de l'équation (g), qui est $-\dfrac{\frac{dc'}{dx}}{\frac{dc}{dy}}$, n'est pas égal à -1, et, par conséquent, les directions données par les deux racines de cette équation ne sont pas rectangulaires.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

ERRATA. — DEUXIÈME PARTIE.

Page 4, ligne 20; *au lieu de* x, *lisez* $x - x_0$
Page 121, ligne 2 en remontant; *au lieu de* y, *lisez* m
Page 128, ligne 10; *au lieu de* impair, *lisez* pair
Page 171, ligne 6; *au lieu de* Σ, *lisez* $\frac{2}{\pi}\Sigma$
Page 176, ligne 15; *au lieu de* x, *lisez* $\sin x$
Page 204, lignes 6 et 12; *au lieu de* o, *lisez* c
Page 240, ligne 7; *au lieu de* $\left(\frac{v}{u}\right)$, *lisez* $\left(\frac{v}{u}\right)'$
Page 241, ligne 11; *au lieu de* x_1, *lisez* x
Page 241, ligne 12; *au lieu de* δ, *lisez* γ
Page 241, ligne 15; *au lieu de* 4, *lisez* δ
Page 242, ligne 2; *au lieu de* 4, *lisez* ε
Page 271, ligne 2; *au lieu de* Δ^n, *lisez* Δ^2
Page 280, ligne 13; *au lieu de* Δx, *lisez* $e^{\Delta x}$
Page 286, ligne 15; *au lieu de* m, *lisez* n
Page 312, ligne 3; *au lieu de* $= \mathrm{l}.y$, *lisez* $+ \mathrm{l}.y$


Cours d'An
Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 11.
Gravé par E. Wormser

